

〔特集〕 ながれと音

# 流れと音の物理

## Physics of Flow-Acoustics

元東京大学教授 神部 勉<sup>†</sup>  
KAMBE Tsutomu

乱流あるいは渦運動から縦波の音波が発生する。また音波と流れが相互作用して散乱波が生ずる。そのような現象の物理的メカニズムを簡潔に解説することがここでの意図である。先ず初めに、流れと音が相互に関わりあう現象について歴史的にたどってみる。

### 1 はじめに

風の中の枯れ枝、あるいは流れの中の細い棒から音波が放射される。それは通称エオルス音 (Aeolian tone) と呼ばれる。ラテン語では Aeolus は風の神を意味するという。Aeolian tones の研究は 1878 年の Strouhal<sup>1)</sup> まで遡る。

Strouhal は支持体に針金を弦のように張って (回転アームによって) 空気中で運動させて、発生する音の振動数  $f$  を測定した。解析の結果、その振動数  $f$  は針金の張力や長さに依存せず、針金の直径  $d$  と空気との相対速度  $U$  だけに依り、無次元数

$$\frac{fd}{U} = S_t$$

はほぼ一定値 0.18 をとることを見だし、これを摩擦音 (Reibungstone) と呼んだ。言うまでもなく、これは現在ストローハル数と呼ばれている無次元数の始まりである。もし弦楽器のように音が弦の振動に起因していたなら、観測された音の振動数は針金の張力や長さに依存しているはずであるが、そうではなかった。このことは流体力学的に大変意味のあることであった。そ

の後 Bénard<sup>2)</sup> によって、この音は渦列<sup>注1)</sup>と結びつけられた (図 1)。さらにそれを Aeolian tone とよんだのは Rayleigh<sup>3)</sup> であった。後に、それは vortex sound と呼ばれて<sup>4)</sup>、渦列のポテンシャルから音の強さも計算された<sup>5)</sup>。しかし vortex sound の理論は、後で述べるように、より一般的な formulation で新たに発展することになった。

音波の研究には長い歴史があるが、古典的な理論では、音の発生源は音を伝える媒質とは別ものとして考察されてきた。多くの楽器の音源がそうである。しかし、流れ自体にも音源、散乱源、吸収源があるという見方が 20 世紀中ごろから明確になってきた。そのきっかけとなったのは、ジェッ

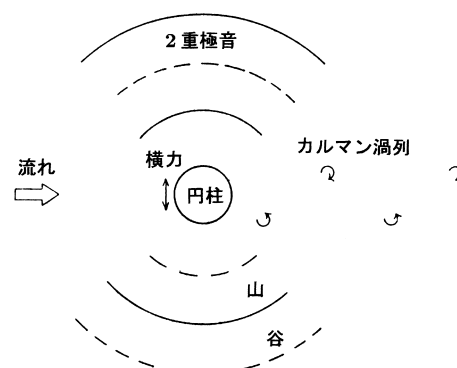


図 1 カルマン渦の発生とエオルス音

<sup>†</sup> 理論応用力学専門委員会 委員長 (日本学術会議)  
〒153-0043 東京都目黒区東山 2-11-3  
力学系研究所, E-mail: kambe@gate01.com

注1) 渦列の観測については、早くは Bénard (1908) および Mallock (1910)<sup>15)</sup> があり、Kármán (1911) の安定性の理論解析より先であった。

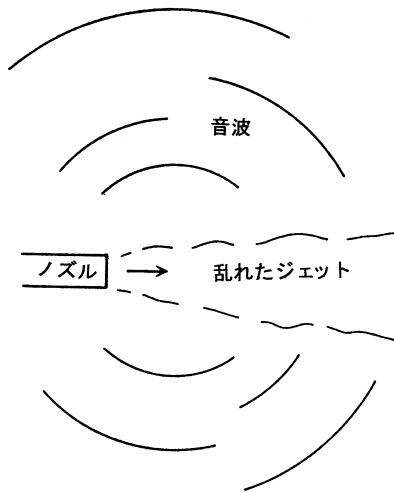


図2 ジェットの放射音

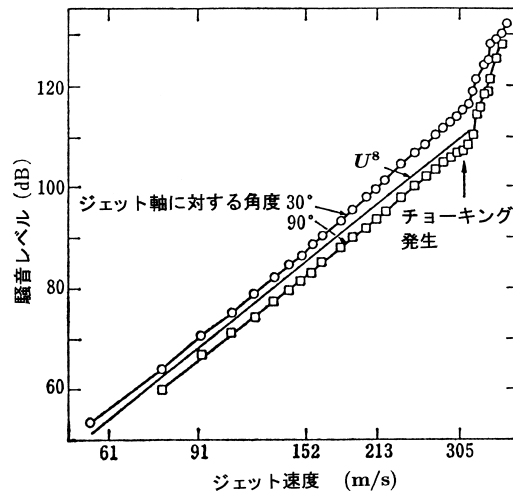


図3 ジェット騒音の8乗則(実測<sup>10)</sup>)

トノイズ、エッジ音、あるいは超音速流のスクリーチ・ノイズ等の研究であった。このような研究分野は、Aerodynamic sound, Flow-Acoustics, Aeroacoustics, あるいは Nonlinear acoustics などと呼ばれている。訳せばそれぞれ、空力音、流れと音、空力音響学、非線形音響学などとなる（「空力音」を使ったのは著者が最初と憶えている<sup>6)</sup>）。また、Flow noise（流れ騒音）という呼び方もあろう。さらに、空力ノイズの低減のための研究、流れの制御のために音波を利用する研究などもある。本特集の編集担当者はながれと音 Flow-Acoustics を採用しているが、より広く把握しようという意図であろう。以上に挙げた諸テーマは、第一線で研究している本特集の寄稿者によって詳しく論じられている。そこで本稿では「ながれと音の物理」として、現象の基本的メカニズムが物理的にどのように把握されるかを述べてみようと思う。

ジェットエンジンが開発されつつあったのは1950年の頃であるが、ジェット騒音についてはその源が、ノズル内部にあるのか、ノズル口付近の流れにあるのか、あるいは下流にあるのか、あまりわかっていなかった。しかしジェットエンジンが大変な騒音を発生することは知られていた。ちょうどその頃若い流体力学者（数理科学

者）だった英国の M. J. Lighthill は、エンジン開発の委員だったこともあって、騒音の発生機構について考えているうちに、その機構を説明する新しい方程式に思い至った。それは Manchester から London に向う列車の中だったので、その式をたまたま持ち合わせた封筒に書きとめたというエピソードがある<sup>7)</sup>。その方程式は、後述するように、ライトヒル方程式とよばれている<sup>8)</sup>。その解から簡単ではあるが一つの重要な結論が導かれた。すなわち、噴き出し速度  $U$  のジェット（図2）が放射する音のパワー（単位時間のエネルギー）は  $U^8$  に比例するという  $U^8$ -法則である。これは低速の  $U$  では弱い、マッハ数  $M = U/c$  ( $c$  は音速) が約 0.2 を超えるあたりから急に強くなる性質を示す。この性質は実験的にもほぼ同時に確認されたが<sup>9)</sup>、図3はその後の実験によるデータである<sup>10)</sup>。

この8乗則はジェット騒音<sup>11)</sup>を減少させる方法をも示唆していると理解された。すなわち、直径  $D$  のノズルのジェットエンジンを航空機の推進に使うためには、ある一定の大きさの推力  $T$  が要求される。推力は毎秒の運動量流出量に等しく、それは  $\rho U^2$  とノズル断面積  $\pi D^2/4$  との積で与えられる ( $\rho$  はジェットの密度)。それゆえ、 $T \sim \rho U^2 D^2 = \text{const}$  が満たされるべき拘束条

件となる (定数  $\pi/4$  は省略). 他方, ノイズの出力  $P$  は,  $P \sim \rho U^8 D^2$  で与えられるが ((13)式の  $P_q$ ),  $T$  を使うと,  $P \sim T U^6$  と表せる. つまり,  $U^2 D^2 (\sim T) = \text{一定の条件のもとでは}$ ,  $P$  を下げるには  $U$  を下げることが必要であるが, そのためにはノズル口径  $D$  を大きくしなければならない結論になる. 例えば大口徑のノズルによって  $U$  を約 30% 減少させれば, 騒音を約 10 dB 減少させることができる. その時, 口径は約 40% 増しとなる. 実際, そのようなエンジンの開発がその後おこなわれた.

## 2 空力音の理論

### 2.1 ライトヒル方程式

空気力学的なメカニズムで音がどのように発生するかを考えてみよう. 空力音の理論は流体力学の方程式に基礎をおいている. 流体の質量保存および運動量保存の法則から, 省略なしにある一つの方程式が導かれる. それが波動方程式の形 (音源項を含む) をしていることが眼目である. 流体の密度を  $\rho$ , 圧力を  $p$ , 速度を  $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$  とすると, 粘性流体の基礎方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} + X_i \quad (2)$$

で与えられる. ただし,  $X_i$  は外力の  $i$  成分で,  $\sigma_{ij}$  は粘性応力テンソルである. また 2 重の下つき添え字については (上式では  $j$ ),  $j = 1, 2, 3$  について和をとる. もし流体が非粘性で, 微小変化が断熱的に起こるものとする, エネルギー式に代わるものとしてさらに, 次の断熱関係式

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho \quad (\Delta p \equiv p - p_0, \Delta \rho \equiv \rho - \rho_0), \quad (3)$$

が加わる. ここで,  $p_0, \rho_0$  は基準 (静止状態) の圧力および密度を表す定数である. この式の係数  $c$  は熱力学的に次のように定義される:

$$c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s} = c(\rho, p), \quad c_0 = c(\rho_0, p_0).$$

ここで,  $s$  はエントロピー (単位質量当り) で,  $(\cdot)_s$  は  $s = \text{一定}$  を意味する.  $c$  は音速を表すことが以下で示される.

式 (1) に  $\partial / \partial t$  を作用させる. また, 式 (2) に  $\partial / \partial x_i$  を作用させて  $i = 1, 2, 3$  について和をとり, (3) を使って  $\nabla^2 p = c_0^2 \nabla^2 \rho$  とおく ( $c = c_0$  を仮定). 両者に共通の項  $\partial^2 \rho v_i / \partial t \partial x_i$  を消去すると,

$$\partial_t^2 \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \partial_i \partial_j T_{ij} - \partial_i X_i \quad (4)$$

を得る ( $\nabla^2 = (\partial^2 / \partial x_i^2)$ : Laplacian). ただし,  $\partial_t = \partial / \partial t$ ,  $\partial_i = \partial / \partial x_i$ . また,

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + (\Delta p - c_0^2 \Delta \rho) \delta_{ij} - \sigma_{ij}, \quad (5)$$

( $\delta_{ij}$  はクロネッカーデルタ). 式 (4) は一般化波動方程式で, 右辺は音源などを表す. もし右辺が 0 なら, この式はいうまでもなく, 密度  $\rho$  の波動が速さ  $c_0$  で伝播することを表す単純な波動方程式である. 式 (4) の形の式は非同次波動方程式と呼ばれる. 一般には状態方程式  $p = F(\rho, T)$  が課せられる. 理想気体の状態方程式と音速は

$$p = R \rho T, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho} \quad (6)$$

である ( $T$ : 温度,  $R$ : 気体定数,  $\gamma$ : 比熱比).

流体が非粘性で ( $\sigma_{ij} = 0$ ), かつ式 (3) の断熱関係式を仮定すると,  $T_{ij}$  は次の形に簡単化される:

$$T_{ij} = \rho v_i v_j. \quad (7)$$

Lighthill<sup>8)</sup> は, 式 (4) が空気力学的な音波の発生を表していると解釈し, そのような音波を Aerodynamic sound (空力音) と呼んだ. 右辺の諸項のために, この式は音波の発生だけでなく, 音が伝播しながら流される効果 ( $v_i$  による), 密度の非一様性  $\Delta \rho$  による散乱, 外力による音の励起, さらに音波の非線形効果で運動を励起してエネルギーを失うことによる音の吸収までも含んでいる. 省略はないので, 何でも含まれるわけである. その意味で, 式 (4) は acoustic analogy (音響類似) とよばれ, またライトヒル方程式と呼ばれている.

式(4)のような非同次波動方程式の形の利点は、偏微分方程式の理論に従って解を積分形で表すことができることである。実際、式(4)は

$$\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{1}{r} X_i(\mathbf{y}, t_r) d^3\mathbf{y} + \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{1}{r} T_{ij}(\mathbf{y}, t_r) d^3\mathbf{y} \quad (8)$$

と変換される。ただし、

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{c_0}$$

で、 $\mathbf{x}$  は観測点、 $\mathbf{y}$  は音源位置を表す。右辺第1項は2重極性、第2項は4重極性の波動を表している。このことは積分の前の空間微分の階数と関係している。実際、第1項の被積分関数の一つは

$$-\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{X_1(\mathbf{y}, t_r) d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

と書ける ( $i = 1$  とした)。他方流体力学の理論では、点  $\mathbf{y}$  に湧出量  $q(t)$  (単位時間当り) の音源があると仮定すると、十分離れた点  $\mathbf{x}$  での音波の密度変動は、 $\dot{q} = dq/dt$  として、

$$\Delta\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 = \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\dot{q}(\mathbf{y}, t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \quad (9)$$

と表せる<sup>6,12)</sup>。これは湧きだしに起因し、等方的な単極音である。時刻  $t$  に点  $\mathbf{x}$  で観測される音波  $\Delta\rho(\mathbf{x}, t)$  は、 $\mathbf{y}$  から  $\mathbf{x}$  に達するに要する時間  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c_0$  だけ前に  $\mathbf{y}$  で発せられたものであることを  $t_r$  は表す。 $t_r$  は遅延時間 (retarded time) と呼ばれる。

流体力学の基本的考察から<sup>12)</sup>、 $-\partial/\partial x_1$  の微分作用があると、 $x_1$  軸方向の2重極音 (acoustic dipole) を表し、その強さは上式では  $X_1(\mathbf{y}, t_r) d^3\mathbf{y}$  で与えられる。さらにもう一つ微分演算が加わると、4重極音 (acoustic quadrupole) を表す。(8) 式の4重極音の強さは  $T_{ij}(\mathbf{y}, t_r) d^3\mathbf{y}$  である。

## 2.2 遠方場

いま流れの領域を  $V$ 、その代表スケールは長さが  $l$ 、速度が  $u$  とし、時間スケールは  $\tau = l/u$  と仮定すると、発生する音波の波長は  $\lambda \sim c\tau = c(l/u) = l/M$  の程度となろう。ただし、 $M = u/c$  は流れのマッハ数。いま音源のスケール  $l$  は  $\lambda$  よりずっと小さいと仮定する ( $l \ll \lambda \sim l/M$ ) と、 $M \ll 1$  が要請される。そのとき、音源関数  $T_{ij}(\mathbf{y}, t)$ 、 $X_i(\mathbf{y}, t)$  の分布は局所的で、分布はコンパクトといわれる。音源領域  $V$  がコンパクトの場合には、次のような遠方場の簡潔な表現を得ることができる<sup>6,13,21)</sup>：

$$\rho_F = -\frac{1}{4\pi c_0^3} \frac{x_i}{r^2} \partial_t F_i(t_r) + \frac{1}{4\pi c_0^4} \frac{x_i x_j}{r^3} \partial_t^2 \bar{T}_{ij}(t_r). \quad (10)$$

ただし、 $\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0 \rightarrow \rho_F$  ( $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ ) および

$$F_i(t) = \int_V X_i(\mathbf{y}, t) d^3\mathbf{y}, \quad \bar{T}_{ij}(t) = \int_V T_{ij}(\mathbf{y}, t) d^3\mathbf{y}.$$

$F_i$  は外から流体に作用する力の合力を表す。

まとめれば、(a) 流体湧出量の局所の変動は単極音源となる、(b) 流体に作用する外力の変動は2重極音源となる、(c) 渦度分布の変動は4重極音源となる (§4,5 参照)。

## 2.3 スケール則

遠方の音圧  $p_F = c_0^2 \rho_F$  に対し、音の放射パワーは

$$P = 4\pi r^2 p_F^2 / \rho_0 c_0 = 4\pi r^2 c_0^3 \rho_F^2 / \rho_0$$

で定義される。スケール則を得るために、時間スケールを  $\tau = l/u$  とし、対応して  $\partial_t \sim 1/\tau$  とする。さらに、単極音の式(9)に対しては  $q \sim \rho_0 u l^2$ 、2重極音では  $F_i \sim \rho_0 u / \tau$  (運動量変化)、4重極音では  $\bar{T}_{ij} \sim \rho_0 u^2$  とすると、

$$\begin{aligned} \partial_t q &\sim \tau^{-1} \rho_0 u l^2 &= \rho_0 u^2 l = A_m, \\ \partial_t F_i &\sim \tau^{-1} (\rho_0 u / \tau) l^3 &= \rho_0 u^3 l = A_d, \\ \partial_t^2 \bar{T}_{ij} &\sim \tau^{-2} \rho_0 u^2 l^3 &= \rho_0 u^4 l = A_q. \end{aligned}$$

単極音 (monopole) のパワーを  $P_m$ , (10)式の第1項 (diploe) のパワーを  $P_d$ , 第2項 (quadruploe) のそれを  $P_q$  とすると, 上より

$$P_m = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left( \frac{A_m}{4\pi c_0^2 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0) u^4 l^2, \quad (11)$$

$$P_d = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left( \frac{A_d}{4\pi c_0^3 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0^3) u^6 l^2, \quad (12)$$

$$P_q = (4\pi r^2 c_0^3 / \rho_0) \left( \frac{A_q}{4\pi c_0^4 r} \right)^2 \sim (\rho_0 / c_0^5) u^8 l^2. \quad (13)$$

となる. 4重極放射の  $P_q$  の8乗則がここに得られた. さらに単極放射, 2重極放射がそれぞれ  $u^4$ ,  $u^6$  に比例する性質も導かれた<sup>6)</sup>.

音の放射効率も次のように見積もることができる. 音源となる流体の運動エネルギーは単位体積当たり  $(1/2)\rho_0 u^2$  である. 体積  $V = l^3$  への流(出)入体積を  $ul^2$  とすると,  $V$  への運動エネルギー流入の割合は  $W = \rho_0 u^3 l^2$  の程度である. 音の放射効率を  $\eta = P/W$  で定義すると,  $M = u/c_0$  として

$$\eta_m \sim M^1, \quad \eta_d \sim M^3, \quad \eta_q \sim M^5 \quad (14)$$

を得る.  $M \ll 1$  の場合は,  $m \rightarrow d \rightarrow q$  の順に効率が下がるが,  $M$  が増加してくると, 4重極放射の効率が急に上ってくる.

### 3 流れによる音の発生: 非線形機構

流れからどのようにして音が発生するのであろうか. その物理的メカニズムを考えてみる. その鍵は非線形機構にある. いま速度場  $\mathbf{v}$  がある瞬間  $t_0$  に非圧縮条件  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  をみたすとしてみよう. たとえ時刻  $t_0$  にこの条件が満たされていたとしても, 運動方程式のために次の瞬間には圧縮性成分が作られることを以下に示そう. この statement は流体力学の常識と矛盾しているように聞こえるかもしれない. というのは, 非圧縮流体の運動には数学的解が存在し, 実際, 学問として体系化されているからである. しかし, その解

には前提があることを忘れてはならない. 非圧縮の速度場が Navier-Stokes 方程式に従うものとすると, よく知られているように, 圧力場  $p(\mathbf{x})$  は次の Poisson 方程式

$$\nabla^2 p = -\rho \partial_i \partial_j (v_i v_j) \quad (15)$$

を満たさなければならない ( $\rho = \text{一定}$ , 外力 = 0 とした). しかし, 流体はさらに物性論的に熱力学的な状態方程式 (例えば  $p = F(\rho, T)$ ) も同時にみたさなければならない. 一般に両者を同時に満たすことはできない. 後者は物理的要請であるのに対し, 前者の(15)式は数学的要請である. 非圧縮流体の力学では(15)式が満たされると暗黙に仮定するが, 実在流体は物理的要請に従うわけで, 式(15)は近似的にしか満たされない. その時にはたとえわずかではあっても, 密度変動が発生する. それはちょうど完全流体の運動の解は存在するが, 実際にはそれが近似的にしか成り立たないのと同様で, 実在流体では粘性境界層の存在などを考慮しなければならない.

さらに, 流れの代表的マッハ数が1に比べて十分小のときに, 流れを近似的に非圧縮とみなす立場がある. これは音速が無限大もしくは十分大とすることに相当している. 実際の音速は有限であるから, 十分大きな領域で観測するときには, 流れの変動の何らかの信号が音速で伝わるのを観測できるはずである. こちらの立場は流れによる音の発生とは原理的に矛盾していない.

そこで問題は前者である. 速度場  $\mathbf{v}$  が非圧縮の条件  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  をみたすとする. そのような場は横波の性質を持っているのに, 音波は縦波である. 縦波がどのようなメカニズムで発生するのであろうか. 実はライトヒル方程式(4)がそれに一つの解答を与える. 速度場  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  をフーリエ表示すると

$$v_i(\mathbf{x}) = \int \hat{v}_i(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

と書ける ( $\mathbf{k}$  は波数,  $\hat{v}_i = (\hat{v}_i)$  はフーリエ振幅). 非圧縮条件

$$\text{div } \mathbf{v} = i \int \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} = 0$$

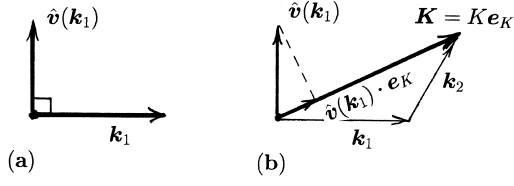


図4 (a)非圧縮条件, (b)縦成分の抽出.

より,  $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = 0$ , すなわち横波の性質  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{k}$  が要請される(図4(a)). 他方において, ライトヒル方程式(4)の音源の第1項は  $v_i$  について2次である.  $T_{ij} = \rho_0 v_i v_j$  とすると ( $\rho = \rho_0$  とした), 第1項は

$$\begin{aligned} \partial_i \partial_j T_{ij} &= \rho_0 \partial_i \partial_j (v_i v_j) \\ &= \rho_0 \partial_i \partial_j \int \hat{v}_i(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}_1 \cdot \int \hat{v}_j(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}_2 \\ &= -\rho_0 \iint (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)) (\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_2)) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

となる<sup>14)</sup>. ただし,  $\mathbf{K} \equiv \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = K \mathbf{e}_K$  ( $K = |\mathbf{K}|$ ,  $|\mathbf{e}_K| = 1$ ). 上式の波数  $\mathbf{K}$  の音源成分は振幅  $K^2 (\mathbf{e}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)) (\mathbf{e}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_2))$  を有する. すなわち, 成分  $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)$  から  $\mathbf{K}$  方向の縦成分  $\mathbf{e}_K \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}_1)$  を抽出し(図4(b)), 同じことを波数  $\mathbf{k}_2$  について行ない, 両者の積を振幅としたものが音源となる. これが方程式(4)の音源第1項の意味で, 場の非線形効果で密度変動の成分が発生し, それが音速で伝播することを式(4)は述べている.

#### 4 粘性効果

流体に粘性があると, 運動エネルギーが散逸して熱となり, エントロピーの増大をもたらす. これは等方的な単極音放射となる<sup>15)</sup>. もし物体の存在のために運動量の変化があると, 2重極放射も加わる (§6). 式(2)の粘性応力  $\sigma_{ij}$  を

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} D_{iv} \delta_{ij} \right) + \mu_v D_{iv} \delta_{ij}$$

と表す. ただし,  $D_{iv} = \text{div } \mathbf{v}$  で,  $\mu$ ,  $\mu_v$  はそれぞれ粘性率, 体積粘性率である.

レイノルズ数  $R = \rho_0 u l / \mu$  が十分大で, またマッハ数は  $M = u / c_0 \ll 1$  と仮定すると, 物体のない自由空間の場合には, 式(10)の第2項のみと

なり, 遠方場の音圧 ( $p_F = c_0^2 \rho_F$ ) は, Kambe<sup>15)</sup>より,

$$p_F = p_q + \frac{\rho_0}{6\pi c_0^2 r} \ddot{K}(t_r) + \frac{\rho_0}{4\pi C_p r} \ddot{S}(t_r), \quad (16)$$

$$K(t) = (\rho_0/2) \int v^2(\mathbf{y}, t) d^3\mathbf{y} \quad (17)$$

と表せる ( $\ddot{K} = d^2 K / dt^2$ ). ここで  $K(t)$  は全運動エネルギー,  $S(t)$  は全エントロピーで, 熱力学的に  $dS/dt = \dot{S} = -\dot{K}/T$  によって関係づけられる. 第1項は渦運動による4重極成分であり, 次節の渦音の式(19)で与えられる. 第2, 3項が粘性散逸に起因する単極成分である. この式の導出では, レイノルズ応力  $\rho v_i v_j$  を等方成分  $(1/3)\rho v^2 \delta_{ij}$  と非等方成分  $[\rho v_i v_j - (1/3)\rho v^2 \delta_{ij}]$  とに分けて解析が行なわれた. 非等方成分からは第1項の4重極項  $p_q$  が, 等方成分からは第2項の  $\ddot{K}$  を含む単極項が導かれた. 後者は巨視的運動による運動論的(力学的)な効果による圧力と考えられる.

上式の第2, 3項は一つにまとめることができる. 比熱比  $\gamma = C_p / C_v$  の気体では ( $C_p$ : 定圧比熱,  $C_v$ : 定積比熱), まとめられた単極音放射は

$$p_m = \frac{5/3 - \gamma}{4} \frac{\rho_0}{\pi c_0^2 r} \ddot{K}(t_r) \quad (18)$$

となる. 単原子気体では  $\gamma = 5/3$  なので, この単極成分は消える. 上に運動論的と述べたのはこの意味である.

#### 5 渦音: Vortex sound

##### 5.1 理論

渦の非定常運動によって放射される音波を vortex sound とよぶ. コンパクトな渦度分布に対しては, 低マッハ数の流れの場合に音圧の理論式が与えられ, いくつかの具体例で実験的にも検証されている<sup>19-21)</sup>. 自由空間での非粘性流体の渦運動では,

$$p_q = \frac{1}{c_0^2} \frac{x_i x_j}{r^3} \partial_i^3 Q_{ij}(t_r). \quad (19)$$

となる. ただし,

$$Q_{ij}(t) = \frac{\rho_0}{12\pi} \int_V y_i (\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{y}, t))_j d^3\mathbf{y}. \quad (20)$$

ここで、 $\omega(\mathbf{y}, t) = \text{rot } \mathbf{v}$  は渦度で、その空間分布と時間発展が知られれば、積分式(20)から音圧  $p_q$  を計算できるのが上式の著しい特徴である。非粘性流体では単極成分はなく、物体がなければ2重極成分も消える。

空力音理論はジェット騒音の発生機構の研究に端を発したが、渦運動による音の発生機構をも明らかにした。最初の理論ではこのことは想定されていなかったことで、やや意外な展開であったかもしれない。最初の節で述べた vortex sound は、渦と物体との相互作用によって生ずる2重極音であったが (§6 参照)、その後 Powell<sup>16)</sup> は別の方面から vortex sound を考察した。その問題では物体はなく、渦運動だけによる4重極音が導かれた。さらに、より洗練された表現は Obermeier<sup>17)</sup> によって、接合漸近展開法という数学的手法で導かれたが、その対象は Powell が例に示した2次元の渦運動であった。すなわち、2つの同じ強さの渦糸は互いの中心のまわりを一定の振動数  $f$  で回転する。そのとき音波が周囲にらせん的に放射される(直接数値計算は文献[27])。Howe<sup>18)</sup> は Lighthill 流の方法を再構成して、楕円柱渦の回転による音の放射の式を導いた。

渦音の発生は速度ポテンシャルの変動としても説明することができる。コンパクトな渦度の分布は周囲に速度ポテンシャル  $\Phi$  で表される渦なしの流れを誘起する。十分遠方の  $\Phi$  を漸近展開で表すと、(2重極ポテンシャル) + (4重極ポテンシャル) + ... の形になる。境界のない無限空間では、第1項の2重極ポテンシャルは時間的に変化しないが、第2項の4重極ポテンシャル  $\partial_i \partial_j (1/r)$  の係数  $-Q_{ij}(t)$  は変動する。その性質に着目して、3次元渦音問題を接合漸近展開法で考察したのが文献[22]であった。速度ポテンシャルの遠方場の変動が4重極音を励起することがそこで明らかにされた。

式(19), (20)に示した3次元問題の一般渦音表現は Möhring<sup>19)</sup> によって最初に与えられた。粘性効果を考慮して渦音理論を整理し、さらに自らの実験測定と比較したのが、Kambe & Minota

(1983)<sup>20)</sup> および Kambe (1986)<sup>21)</sup> である。接合漸近展開法を発展させて、渦の斜め衝突の問題に応用し、実測と比較したのが Kambe, Minota & Takaoka<sup>23)</sup> である。さらに同じ問題の計算機シミュレーションによって実験に即したデータで比較し、よい一致を得たのが Ishii, Adachi & Kambe<sup>24)</sup> であり、音源についても考察している。

## 5.2 実験

渦音の実験的検証は空気中の2つの渦輪の正面衝突の問題(図5)で初めてなされた<sup>20)</sup>。実在流体の空気では粘性で運動エネルギーが散逸して熱に変わる。その結果、§4で述べた単極音が放射される。空気の比熱比を2原子分子の値  $\gamma = 7/5$  で近似すると、 $p_m = \dot{K}(t_r)/(15\pi c_0^2 r)$  と表せる。粘性効果で運動エネルギーが散逸すると、その影響が等方的な単極音放射となることを表している。実験では、各渦輪(初期半径  $R_0$ ) の速度  $U$  のマッハ数が0.14、レイノルズ数が  $UR/\nu = 1.4 \times 10^4$  であり ( $\nu = \mu/\rho_0$ )、4重極性の渦音(図6)の他

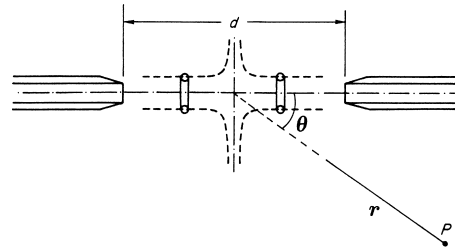


図5 2渦輪の衝突軌跡

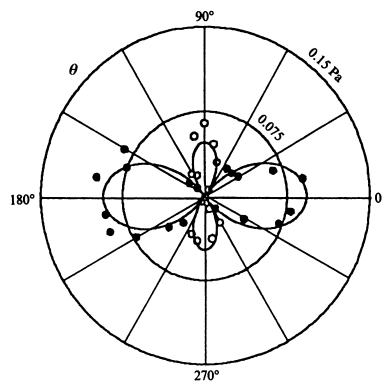


図6 4重極分布. 実測(○正圧, ●負圧)とフィット曲線  $C(\cos^2 \theta - 1/3)$ , ( $C$ : 定数)<sup>21, 25)</sup>

に、粘性効果によるとみられる等方成分も検出された<sup>20,25)</sup>。図7は音圧の4重極成分(実線)と単極成分(破線)を示す。振幅は $U^4$ に比例して増加する(図10)。パワーは振幅の2乗に比例するので、これは式(13)と一致している。

図8は2渦輪の斜め衝突において検出された非対称放射である<sup>23)</sup>。

図9は渦輪が円柱の横を通過するとき放射される2重極渦音を表示している。分布は8の字形放射となる<sup>13,30)</sup>。測定されたパワーは $U^{6.4}$ に比例している(図10)。渦輪がエッジの傍を通過するときには、音の放射は心臓形の分布をとる(図12)。(§7参照)これは図10の最も高い音圧振幅の測定値を与え、パワーは $U^5$ に比例して増加する。この性質は単極音と2重極音の中間にあたる。

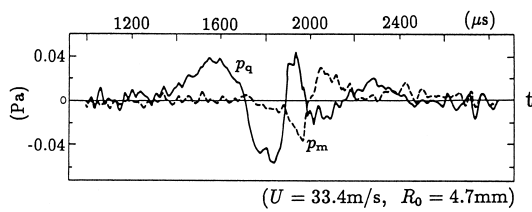


図7 4重極成分 $p_q(t)$ と単極成分 $p_m(t)$ の波形<sup>25)</sup>

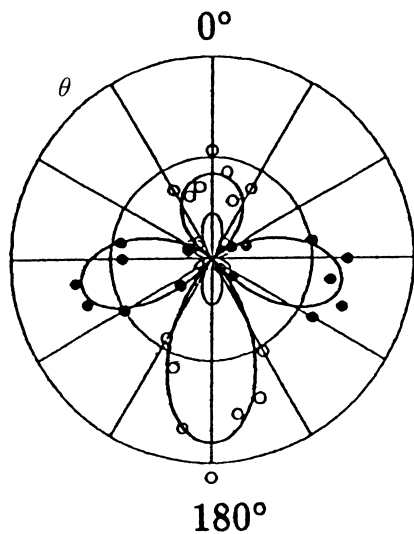


図8 2渦輪の斜め衝突における非対称放射<sup>23)</sup>

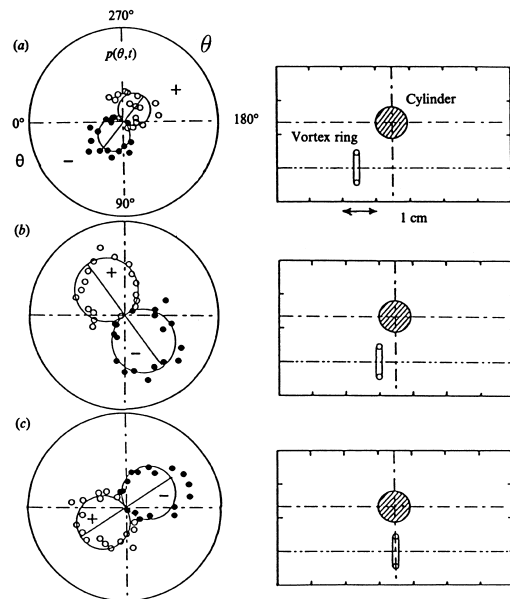


図9 2重極放射の8の字形方向分布<sup>30)</sup>

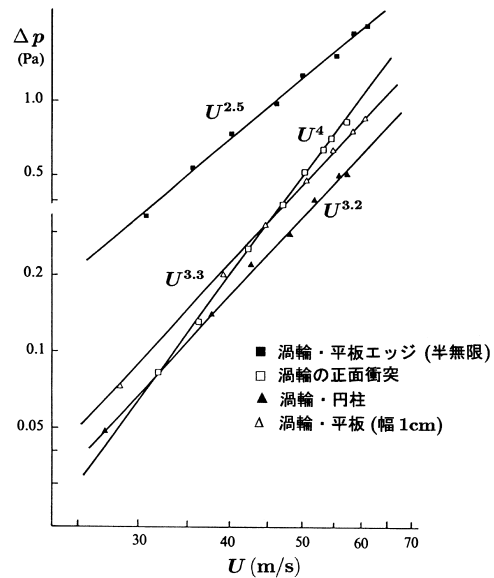


図10 音圧振幅 $\Delta p$ の渦輪速度 $U$ への依存性<sup>21)</sup>

### 5.3 直接数値シミュレーション

10数年前までは、流れによる音の発生の直接数値シミュレーションは大変難問であると考えられていたが、最近ではそれが可能となってきた。Computational Aeroacousticsと呼ばれる分野がそれで、本特集の一つの注目のトピックにもなっ

ている。典型的な問題では、巨視的流れの圧力に対する音波の圧力は  $10^{-4}$  ないし  $10^{-6}$  のオーダーで、計算精度の上で両者を十分に分解できるか否かが焦点で、文献[26,27]でその口火がきられた(文献[28]はレビュー)。最近、2渦輪の正面衝突の軸対称問題で直接シミュレーションが行なわれ(Inoue, Hattori & Sasaki<sup>29)</sup>)、定性的に実験とよく合う結果が得られた。しかし、計算のレイノルズ数が実験の約 1/10 であること、軸対称性を課した計算であること等で、今後はまだ課題が残されている。

## 6 2重極音

物体の近くに渦が存在すると、渦運動自体の4重極放射の他に2重極性の放射場が加わってくる。物体(固体)がたとえ静止としても、物体表面上で満足されるべき「法線速度 = 0」の条件のために、そこに圧力変動が発生し、それが縦波を生んで外界に放射される。物体が存在すると、放射効率の点からも(式(14)参照)、より大きな音エネルギーの放射がある。物体効果は式(10)の第1項の2重極項で表され、その振幅は物体上に流体から働く力  $-F_i(t)$  の  $t$ -微分に比例している<sup>6,21)</sup>。

### 6.1 エオルス音(Aeolian tone)

最初に述べたように、円柱(直径  $d$ 、長さ  $L$ )を速度  $U$  の一様な流れの中に置いたときに発生する音がエオルス音のモデルである。エオルスの名は、風の中で音を発する古典弦楽器 Aeolian harp (風鳴琴, wind harp) に由来している<sup>注2)</sup>。

流れの中で円柱側面から正負の渦が交互に放出される反作用で、長さ  $L$  の円柱に変動横力  $= -F_i(t)$  が働く。一様流の方向を  $x_1$  軸、円柱軸を  $x_3$  軸とし、円柱軸に垂直な断面を  $(x_1, x_2)$  面として、 $-F_i(t) = (0, F(t), 0)$  と書き、横力を(振動数  $f$ )

$$F(t) = A_1 \rho_0 U^2 L d \sin 2\pi f t \quad (A_1: \text{無次元定数})$$

注2) ショパンの練習曲(作品25の第1番)に Aeolian harp という短いながらも名曲のあることを人から教わった。

と表す。このとき式(10)の第1項の2重極放射の強さ  $I(\sim c_0^3 \rho_F^2 L^2 / \rho_0)$  は、

$$I(r, \theta) = A \frac{\rho_0 L^2 S_t^2}{c_0^3} U^6 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

と表せる ( $P = \int I(r, \theta) r d\theta$ )。ここで、 $\sin \theta = x_2/r$  で、 $\theta$  は流れの方向から測った観測方向の角度、 $S_t = fd/U$  はストローハル数である。放射の強さは  $U^6 S_t^2 \sin^2 \theta$  に比例し(式(12)と一致)、円柱軸に垂直な断面内で、流れに直角方向に極大をもつ8の字形の分布をもつ。

## 7 エッジ音(Edge tone)

鋭いエッジのある物体は強いノイズの発生原因となる。図10の平板エッジのデータおよび次節で述べるエッジの傍を通過する渦輪による音波がそうであるが、他によく知られた例はジェットの中のエッジの音である。一般にジェットは不安定性のために、わずかに上下左右にゆれる(周期的横揺れ)。そのため渦度の周期的変動をきたす。ジェットが当たるエッジ面で渦度の変動が起こり音波が発生する。この音波が前方のノズル口に達すると、ジェットの流出を変調させる。これがフィードバックとなって、ある種の共鳴現象がおこる<sup>6,10)</sup>。

ノズル口で渦が作られる周期が  $\tau$  とする。その変動は下流に向かい、同じ周期でエッジに達し、渦音を発生する。この音波はある位相差をもって同じ周期で元のノズル口の渦の発生をコントロールする。もしノズルとエッジとの間の距離  $d$  が適当で、渦の発生を増幅する位相でノズルへのフィードバックが起るなら、共鳴によって大きな音が発生する。このような共鳴エッジ音は、亜音速でも超音速でも生ずる。

管楽器のフルートでは、エッジの渦音と管内の気柱の振動が共鳴する<sup>18)</sup>。

## 8 音のファラデーの法則

電磁気学のファラデーの法則は、いうまでもなく「ある閉回路を通過する磁力線の量(磁束)

が変化すると回路に起電力が生じて電流が流れる」という法則であるが、磁束の変化に応じて電流が変化すれば、電磁波が放射されることになる。対応する音の放射の問題では、回路の役は渦線、磁力線の役は（仮想ポテンシャル流の）流線になる。Howe<sup>18)</sup>が考察した場合は、エッジを回り込む渦フィラメントの2次元問題であった。エッジに平行な直線渦は自らの誘導速度である軌道 $x_v(t)$ を描いてエッジを回り込む。他方、よく知られたエッジをまわる仮想的なポテンシャル流(図13)を考え、その流線関数を $\Psi(x)$ とする。 $\Psi(x) = \text{const}$ で表される流線と、直線渦の軌道 $x_v(t)$ とは一致せず、直線渦は仮想流線を切りながら運動する。そのとき放射される音波の圧力は

$$\frac{d}{dt} \Psi(x_v(t)) = \left( \frac{D}{Dt} \right)_v \Psi(x)$$

に比例する： $(D/Dt)_v \equiv \partial_t + \dot{x}_v \cdot \nabla$ 。渦が流線を切っていく割合が音圧の振幅を与える。

3次元問題でも同様の性質が導かれた<sup>21)</sup>。渦

輪のような閉曲線渦が物体近傍で運動するとき放射される音波は、いわゆる渦音であるが、その音圧が次のように表される。

円柱の横を渦輪が通過するとき放射される音波は2重極性である。いま仮想的に、一様流が円柱近傍を通り観測点 $x$ の方に向う流れ(ポテンシャル流)を考える(図11)。それが現実の渦輪を通り抜ける流量を $J_c(t)$ としよう。このとき点 $x$ で観測される音の圧力は、 $(d/dt)^2 J_c(t)$ に比例する。これは実験観測を非常によく説明する<sup>30)</sup>。渦輪を円形回路とし、流線を磁力線とすると、これはファラデー

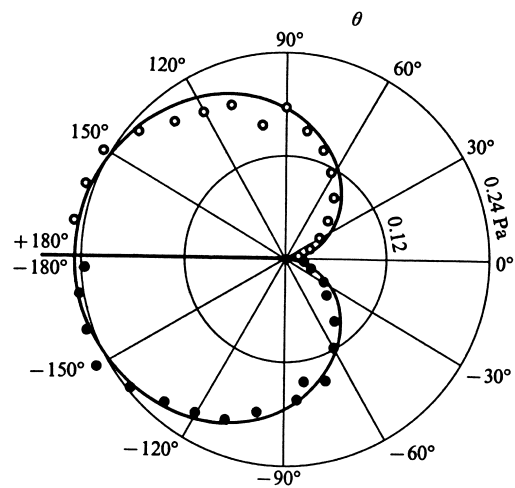


図12 心臓形(cardioid)分布のエッジ音放射<sup>31)</sup>

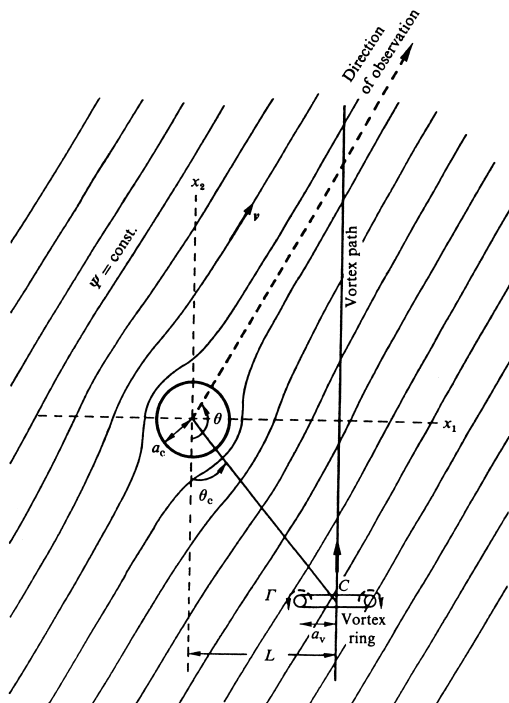


図11 円柱まわりの仮想ポテンシャル流の流線と渦輪の軌道

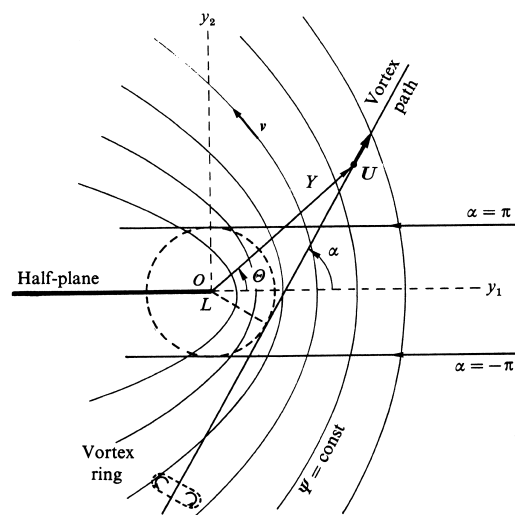


図13 エッジをまわる仮想ポテンシャル流

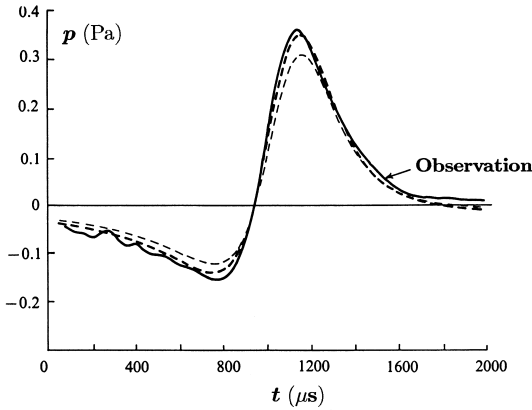


図 14 観測波形(実線)と計算波形(破線)の比較<sup>31)</sup>

の法則によく似ており、**Acoustic Faraday's law** とでも呼べよう。

エッジの横を通過する渦輪による放射は、2重極ではなく心臓形 (cardioid) の方向分布となる (図 12)。エッジをまわる仮想ポテンシャル流が渦輪を通り抜ける流量を  $J_e(t)$  とすると (図 13)、放射音の圧力は、

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{1/2} \left(\frac{d}{dt}\right) J_e(t)$$

に比例する<sup>13,31)</sup>。この性質も実験観測と非常によく一致する (図 14)。分数次微分  $(d/dt)^{1/2}$  の定義については文献[31]を参照のこと。

### 9 音波の散乱：Scattering

ある方向に伝播している音波 (入射波) の進路上に物体があると、波がそこで乱されて、物体を中心としてすべての方向に波が散乱される。これは散乱波 (scattered wave) と呼ばれる。渦の流れ場は一般に局所的であるが、物体と同じように、やはり散乱波を生ずる。この散乱波はライトヒル方程式 (4) にもとづいて、速度場から導くことができる<sup>14,32,33)</sup>。

音波の散乱は、入射波と流れ場  $v_i$  との相互作用の結果として生ずる。音波の誘起する速度場を  $w_i$  とすると、全速度は  $U_i = v_i + w_i$  と書ける。式 (5) の  $T_{ij} = \rho(v_i + w_i)(v_j + w_j) + \dots$  の中で相互作用に関係するのは  $\rho(v_i w_j + w_i v_j)$  の形をとる。散乱波

は入射波に対して摂動とみなせると仮定し、そこで Born 近似 (量子力学の)、すなわち  $w_i$  を入射波の速度場  $w_{0i}$  で置き換える近似によって、散乱波  $w_{si}$  の表現を得ることができる ( $w_i = w_{0i} + w_{si}$ )。

もし渦度場  $\omega(x)$  が知られていれば、 $\omega(x)$  だけで散乱波を表わせるので、「渦散乱」と称することもできる。散乱波は比較的簡潔な式で表わせるので、それを以下に示そう。入射波は平面波で、その音圧  $p_0$  は、振幅  $a$ 、角振動数  $n_0$ 、波数  $k_0 = k_0 e_0$  ( $|k_0| = k_0$ ,  $|e_0| = 1$ ) とする：

$$p_0(x, t) = a \exp [i(k_0 \cdot x - n_0 t)] .$$

この音波が入射して渦度場  $\omega(x)$  と相互作用すると、散乱波  $p_s(x, t)$  が生じる。局在した渦度場  $\omega(x)$  から十分離れた遠方 ( $r = |x| \rightarrow \infty$ ) では、 $p_s(x, t)$  は一般に次のように表せる：

$$p_s(x, t) = a f(e, e_0) \frac{1}{r} \exp [-in_0(t - r/c_0)] .$$

ただし、 $e = x/r$ ,  $c_0 = n_0/k_0$ 。関数  $f(e, e_0)$  は散乱振幅とよばれるが、いまの場合

$$f(e, e_0) = i \frac{n_0}{2\pi c_0^2} \frac{k_0^2}{k^2} (e \cdot e_0) (e \times e_0) \cdot \hat{\omega}(k)$$

と表せる<sup>34,35)</sup>。ただし、 $\hat{\omega}$  は  $\omega(x)$  のフーリエ振幅  $\hat{\omega}(k) = \int \omega(y) \exp[-ik \cdot y] d^3y$  である。また、 $k = k - k_0 = k_0(e - e_0)$  は散乱ベクトルで ( $k = k_0 e$ )、 $e_0$  は入射方向、 $e$  は散乱方向の単位ベクトル、散乱角は  $\theta = \cos^{-1} e \cdot e_0$  で与えられる (図 15)。散乱振幅  $f$  の著しい特徴は、散乱の方向  $e$  では、 $\omega(x)$  のフーリエ係数のなかの特定の成分  $\hat{\omega}(k)$  だけが関係することである。この性質は結晶による X 線回折の現象と類似していて、

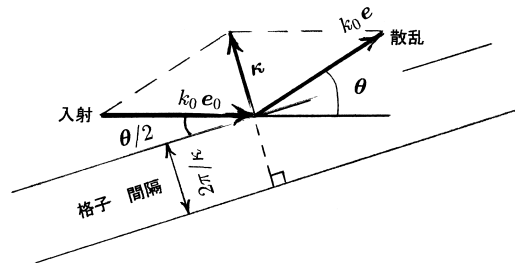


図 15 散乱ベクトル  $k$  (音の Bragg の法則)

場の各フーリエ成分の波が一つ一つの結晶格子のような役割をすると解釈される。回折格子においては波数  $k_0$ ,  $k$ ,  $\kappa$  の関係はブラッグ (Bragg) の法則の名で呼ばれている。

## 10 おわりに

音と流れが互いに関わる現象について基本的メカニズムを考察してきた。流れによって発生する音波の性質とスケール則、音の発生の非線形機構、粘性の効果、渦音、音のファラデーの法則、渦散乱等を解説したが、十分に尽くせなかった点もある。壁穴を通抜る渦輪の放射音<sup>36)</sup>、ジェット騒音、超音速ジェットのノイズ等、残念ながらここではふれることが出来なかった。音波による流れの制御、空力騒音の制御、流れによる音の吸収・消音<sup>14)</sup>、超音波による流れの発生等、他にも多くの問題がある。これらのいくつかは本特集で第一線の研究者によって解説されており、そちらをご覧ください。幸いである。

## 引用文献

- 1) V. Strouhal : Ueber eine besondere Art der Tonerregung, *Ann. Phys. Chem. (Wied. Ann. Phys.)* **5** (1878) 216-251.
- 2) H. Bénard : Formation des centres de giration à l'arrière d'un obstacle en mouvement, *Compt. Rend.* **147** (1908) 839.; Étude cinématographique des remous et rides produits par la translation d'un obstacle, *Compt. Rend.* **147** (1908) 970.
- 3) Lord Rayleigh : Aeolian tones, *Phil. Mag. S.6* **29** (1915) 433.
- 4) E. Y. Yudin : On the vortex sound from rotating rods, *Zh. Tekhn. Fiz.* **14** (1944) 561 (英訳 : NACA TM 1136 (1947)).
- 5) D. I. Blokhintsev : Acoustics of a nonhomogeneous moving medium, *Mosvow* (1946) (英訳 : NACA TM 1399 (1956) 1-194).
- 6) 神部 勉 : 空力音(解説), *日本音響学会誌* **45** (1989) 53-61.
- 7) J. Lighthill : Early development of an "acoustic analogy" approach to aeroacoustic theory, *AIAA J.* **20** (1982) 449-450.
- 8) M. J. Lighthill : On sound generated aerodynamically. I. General theory, *Proc. R. Soc. Lond. A* **211** (1952) 564-587.
- 9) A. Powell : A schlieren study of small scale air jets and some noise measurements on two-inch diameter air jets, *Aero. Res. Co. (UK), ARC Paper* 14726 (1951).
- 10) A. Powell : Flow noise, *Noise Control Eng.* **8** (1977) 69-80 (I) ; 108-119 (II).
- 11) M. J. Lighthill : Jet Noise, *AIAA Journal* **1** (1963) 1507-1517.
- 12) J. Lighthill : *Waves in Fluids* (Cambridge Univ. Press, 1978).
- 13) T. Kambe : Aerodynamic sound associated with vortex motions : observation and computation, *Theoretical and Applied Mechanics 1992* (eds : Bodner et al., Elsevier B.V., 1993) 239-255.
- 14) 神部 勉 : 「流れと音」(流体力学の展望 4), *日本流体力学会* (1983) §5.
- 15) T. Kambe : Influence of viscosity on aerodynamic sound emission in free space, *J. Sound & Vib.* **95** (1984) 351-360.
- 16) A. Powell : Theory of vortex sound, *J. Acoust. Soc. Am.* **36** (1964) 177-195.
- 17) F. Obermeier : Berechnung aerodynamisch erzeugter Schallfelder mittels der Matched Asymptotic Expansions, *Acustica* **18** (1967) 238-240.
- 18) M. S. Howe : Contribution to the theory of aerodynamic sound, with application to excess jet noise and the theory of the flute, *J. Fluid Mech.* **71** (1975) 625-673.
- 19) W. Möhring : On vortex sound at low Mach number, *J. Fluid Mech.* **85** (1978) 685-691.
- 20) T. Kambe & T. Minota : Acoustic wave radiated by head-on collision of two vortex rings, *Proc. R. Soc. London A* **386** (1983) 277-308.
- 21) T. Kambe : Acoustic emission by vortex motions, *J. Fluid Mech.* **173** (1986) 643-666.

- 22) T. Kambe & T. Minota : Sound radiation from vortex systems, *J. Sound & Vib.* **74** (1981) 61-72.
- 23) T. Kambe, T. Minota & M. Takaoka : Oblique collision of two vortex rings and its acoustic emission, *Phys. Rev E* **48** (1993) 1866-1881.
- 24) K. Ishii, S. Adachi & T. Kambe : Sound generation in oblique collision of two vortex rings, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 2306-2314.
- 25) T. Kambe & T. Minota : Observation of acoustic emission from head-on collision of two vortex rings, *J. Sound & Vib.* **111** (1986) 51-59.
- 26) S. K. Lele : Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comp. Phys.* **103** (1992) 16-42.
- 27) T. Poinso & S. K. Lele : Boundary conditions for direct simulation of compressible viscous flows, *J. Comp. Phys.* **101** (1992) 104-129.
- 28) S. K. Lele : Computational aeroacoustics : a review, AIAA paper (1997) 97-0018.
- 29) O. Inoue, Y. Hattori & T. Sasaki : Sound generation by coaxial collision of two vortex rings, *J. Fluid Mech.* **424** (2000) 327-365.
- 30) T. Minota & T. Kambe : Acoustic waves emitted by a vortex ring passing near by a circular cylinder, *J. Sound & Vib.* **119** (1987) 509-528.
- 31) T. Kambe, T. Minota & Y. Ikushima : Acoustic wave emitted by a vortex ring passing by the edge of a half-plane, *J. Fluid Mech.* **155** (1985) 77-103.
- 32) M. J. Lighthill : On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound or shock waves, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49** (1953) 531-551.
- 33) R. H. Kraichnan : The scattering of sound in a turbulent medium, *J. Acoust. Soc. Am.* **25** (1953) 1096-1104.
- 34) 神部 勉 : 渦システムによる音波の散乱, *日本流体力学会誌* **1** (1982) 149-165.
- 35) M. S. Howe : On the scattering of sound by a vortex ring, *J. Sound & Vib.* **87** (1983) 567-571.
- 36) T. Miyazaki & T. Kambe : Axisymmetric problem of vortex sound with solid surfaces, *Phys. Fluids* **29** (1986) 4000-4015.
- 37) A. Mallock : Influence of viscosity on the stability of the flow of fluids, *Proc. R. Soc. Lond.* **A84** (1910) 482-491.