

物理学とはどういう学問なのか

SPP 講義 (Science Partnership Program Lecture)

川越高等学校, 2004年6月12日

I. 物理学とは

1. はじめに:

小柴先生と宇宙ニュートリノ、自然科学の歴史

2. 宇宙ニュートリノの検出と超新星爆発のシナリオの検証: 星の進化、超新星、元素合成のシナリオ

3. ニュートンの運動方程式はどの時刻どの場所でも成り立つ: 不変性の原理

II. 宇宙のすがた

4. 膨張宇宙、赤方偏移、ハッブルの法則

5. ビッグバン名残りの宇宙背景放射

6. 重力の法則、ブラックホール、光線の湾曲

III. 力学系 (ダイナミカル・システム)

7. 気象現象と決定論的カオス

神部 勉

東京大学 (物理学, 教授, 2000年退官)

南開大学 (中国) 数学研究所 客員教授

川越高校出身 (1958年卒)

<http://hw001.gate01.com/~kambe/>

Email: kambe@gate01.com

I. 物理学とは

1. はじめに

[写真 1]

1.1 小柴先生と宇宙ニュートリノの検出

小柴昌俊先生は、2002年のノーベル物理学賞を受賞しました。受賞理由は「天体物理学、特に宇宙ニュートリノの検出へのパイオニア的貢献」でした。カミオカンデ (KamiokaNDE: Kamioka Nucleon Decay Experiment) という名称の検出器を、岐阜県飛騨市神岡町の鉱山跡に建設して、1987年に超新星爆発からのニュートリノを初めて捕らえたこと、およびその結果、ニュートリノ天文学という新しい学問分野を開拓したことが評価されました。私(神部)は当時、小柴先生と同じ、東京大学理学部物理学教室の助教授として在籍し、この独創的な研究の進展を目の当たりにしました。

KamiokaNDEの改良がその後おこなわれて、1987年1月1日から太陽ニュートリノの観測が開始された直後、1987年2月23日には、大マゼラン星雲で超新星爆発が起って、そこから飛来したニュートリノを世界で初めて捕らえることに成功しました(参考書[1])。小柴先生は東京大学定年退官の1ヶ月前ということで、「先生は運がいい」とよく言われていますが、「運は、よく準備されている実験装置に訪れるものだよ」と小柴先生はおっしゃっています。太陽ニュートリノを捕らえようとする努力をしていなかったら超新星爆発のニュートリノは捕らえられなかったでしょう。

インターネット HP1: ”小柴東大名誉教授ノーベル賞受賞”

http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/nobel2002/index_j.htm

今回の KamiokaNDE によるニュートリノ爆発の観測は、星の進化と重力崩壊の天体物理学的理論の正しさを定量的に確認する結果になりました。

我々の銀河およびその近傍で超新星が観測されたのは、ケプラーが1604年に観測したSN1604以来、400年振りである。

1.2 自然科学の歴史 (参考書 [2], [3])

ガリレイ Galilei (1564 – 1642) :

運動の法則 (斜面をころがる球の加速度運動) [図 2] :

1, 3, 5, 7, ... の間隔をおいて鈴をおいたら、等間隔で鳴る?

ガリレイの相対性原理 (船のマストから石を落としたら?)

実験と論証 (科学の方法) 天体の運動の観測

ケプラー Kepler (1571 – 1630) :

惑星の運動の法則 : (1) 楕円軌道 (太陽はその一つの焦点), (2) 面積度一定, (3) T^2 は R^3 に比例する (T : 公転周期, R : 太陽からの平均距離). これらを長年の詳しい観測データから導いた。

ニュートン Newton (1643 – 1727) :

天体と地上物体の運動の同等性。

万有引力の法則: 天体と地上物体に作用する力の同等性

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \quad (1)$$

距離 r の 2 つの質量 m と M の間に働く引力が F . G は重力定数.

ファラデー Faraday (1791 – 1867) :

電磁誘導の法則 (ファラデーの法則)

場 field の概念: 電場と磁場

マクスウェル Maxwell (1831 – 1879) :

電気と磁気の法則を整理して、電磁波の存在を理論的に導き、電磁波の速度と光速とが一致することを見出した:

$$\text{光速の値 } c = 3.0 \times 10^8 \text{ m/s } (= \text{ m s}^{-1}) : \text{ 座標系によらない } \quad (2)$$

アインシュタイン Einstein (1879 – 1955) :

アインシュタインの相対性原理, 4次元時空

$E = mc^2$: 質量とエネルギーの等価性.

等価性原理: 加速度と重力の同等性.

一般相対性理論 (重力の法則): 不変性原理 (ゲージ場の理論)

問題 1. 地上の重力加速度は $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ である。地球半径を $R_{\oplus} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ で、地球-月の中心間の距離を $R = 60 R_{\oplus} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$ とする。距離の 2 乗に反比例する万有引力の法則を仮定すると、月が地球からうける加速度 α はどれだけか。次に、月の円軌道速度を V とし、 $\alpha = V^2/R$ の関係式から、月が地球を一周する周期 T は何日か計算によって求めよ。 ($\pi = 3.14$)

$$\text{月が地球からうける加速度 } \alpha = 2.7 \times 10^{-3} \quad \text{m/s}^2$$

$$\text{月の円軌道速度 } V = \sqrt{\alpha R} = 1.0 \times 10^3 \quad \text{m/s}$$

$$1 \text{ 日 } D = 8.64 \times 10^4 \quad \text{s}$$

$$\text{月が地球を一周する周期 } T = \frac{2\pi R}{V} = 2.41 \times 10^6 \text{ s} = 27.9 \text{ 日}$$

観測では、恒星月は 27.3 日である。ニュートンはこのような計算で、万有引力の法則を確認した。

物理学とは

運動の法則

一見異なる現象の間関係の法則、および同等性

仮説・観測・実験、と論証・方程式・計算：実証

時空と、その中の場と物質、および相互作用の法則

不変性原理と保存法則

ドップラー Doppler (1803 – 1853) : 音・光の波長、振動数の変化

ドップラー効果 Doppler effect

音源が速度 u で運動しながら振動数 f_0 、波長 λ_0 の音波を発するとき、
静止観測者が受ける音波の波長 λ と振動数 f は音速を a_0 とすると、

$$\lambda = \frac{a_0 \pm u}{f_0} = \lambda_0 \left(1 \pm \frac{u}{a_0}\right). \quad (3)$$

ただし、+ は音源が後退、- は接近する場合。

マッハ Mach (1838 – 1916) :

衝撃波 Shock wave

超音速とマッハ円錐

ボルツマン Boltzmann (1844 – 1906) :

絶対温度 : $T(^{\circ}\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273.15$

ボルツマン定数 : $k = 1.4 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} / \text{K}$ (4)

質点 m の x, y, z 方向の平均の運動エネルギーそれぞれ $\frac{1}{2} kT$

(1 質点の平均運動エネルギーは $\frac{3}{2} kT$)

—— エネルギー等分配の法則

プランク Planck (1858 – 1947) :

光子 (振動数 ν , 波長 λ) : $\nu\lambda = c (= 3.0 \times 10^8 \text{ m/s})$ (5)

プランク定数 : $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ (6)

光子 photon = エネルギー量子

• 振動数 ν の光子 1 個のエネルギー = $h\nu = hc/\lambda$

• プランクの黒体 (空洞) 放射の法則 ($\lambda = c/\nu$: 波長)

2. 宇宙ニュートリノの検出と超新星爆発のシナリオの検証

—— ニュートリノ天文学の幕開け ——

星の進化、超新星の理論、および元素合成のシナリオが確認された

—— 天体物理学的成果 ——

2.1 カミオカンデ KamiokaNDE

カミオカンデは1981年の当初、陽子崩壊の検出を目的として建設された。陽子崩壊が観測できれば、物理学の「力の大統一理論」が証明されることになる。その目的のために開発されたカミオカンデ装置で観測が開始されたが、その後すぐに、宇宙線粒子の μ (ミュオン) の崩壊が測定器内で観測され、そこで生成された電子 e の放出する光が観測された:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

この装置で、そのような低いエネルギーの現象も観測できることを認識し、1984年からは太陽ニュートリノ観測を目指して装置の改良が行なわれ、名前は同じ KamiokaNDE だが、今度は Kamioka Neutrino Detection Experiment となった。

ニュートリノ ν (neutrino) 粒子が最初に導入されたのは、中性子 n (neutron) が陽子 p (proton) に変換する β 崩壊 (β 線放射) の現象で、エネルギー、運動量などの保存則が満たされなければならない、という理論的要請からである:

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e.$$

カミオカンデは、3000トンの水タンクに1000本の光電子増倍管とよばれる光検出器を装置された、水チェレンコフ測定器である。装置は、直径15.6 m、高さ16 mの円筒形水槽に純水3,000トンを満たし、高速荷電粒子が水中で発するチェレンコフ光¹を捕らえて、水槽内で起きた様々な現象を観測する。水槽の内壁には、この実験のために特に開発された、直径約50 cmの光電子増倍管を約1,000個、1 m²に1個配置してあり、この光電子増倍管でチェレンコフ光を捕らえる。1996年には一まわり大きいスーパーカミオカンデ (直径39 m、高さ42 m) にその役目をゆずり、役割を終えた。

超新星爆発は太陽よりも重い恒星がその一生を終えるときに起こす大爆発で、爆発の際、太陽の50億年分のエネルギーのさらに1000倍という莫大なエネルギーを放出する。エネルギーの99%は約10秒間にニュートリノとして放出され、1987年2月23日カミオカンデは、16万光年の比較的近距离にある大マゼラン星

¹水中の光速 c_w は真空中の光速 c の3/4である。 c_w より速く走る電子は衝撃波を発生し、円錐状の光の波面を生ずる。それがチェレンコフ光である。

雲で起きたそのような超新星爆発で発生したニュートリノの 11 例を世界で始めて検出することに成功した (参考書 [1])。その結果、ニュートリノ天文学の幕が新たに開かれることになった。マゼラン星雲は、われわれの天の川銀河の伴星雲で、光では南半球でのみ観測される。

インターネット HP2: ”スーパーカミオカンデ”

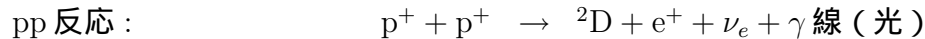
http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index1_j.html

[光電管の実験]

2.2 星の進化、超新星爆発、元素合成

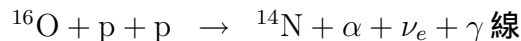
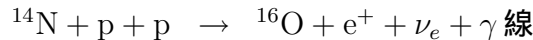
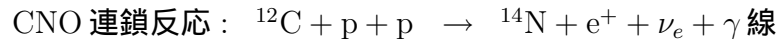
1987 年の超新星 SuperNova SN1987a は次のようなタイプと考えられている。これは太陽の 10 倍以上の質量の星が進化の果てに重力崩壊して、その際に大量の光とニュートリノを放出して輝く現象である。光で観測されるエネルギーは、全エネルギーの 1% だけで、ほとんどのエネルギーはニュートリノが運ばれる。

質量が太陽より 10 倍ほど重い星の場合、理論で想定される星の進化のシナリオは以下のようである (参考書 [4])。中心部では高温の 4 個の水素核 $H^+ = p$ (proton プロトン) が融合して He 核 (α 粒子) になる核融合反応が進行する ($4p \rightarrow \alpha$)。すなわち、H が燃えて He になるとき、光 (γ 線) とニュートリノを放出する:

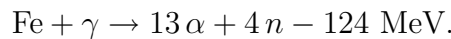


ここで、 ${}^2D^+ = (pn)$: 重水素核、 4He 核 = (ppnn) = α 粒子 = α 線、 $\bar{\nu}_e$: 反ニュートリノ。

水素 H が燃えつきると、次はヘリウム He や炭素 C の核反応へと進む: $3{}^4\alpha \rightarrow {}^{12}C$ 。その次の典型的な反応は CNO 連鎖反応である。概念的に書くと、



このような星の内部での元素合成は連鎖的に起り、最後に中心部分に鉄 Fe の核が形成されて核融合が終る。続いて起る Fe 原子核からさらに重い原子核が合成される反応は、すべて吸熱反応となり、温度が上がらず星の自重を支えきれないで縮む。縮むと温度は上昇するが、その結果 γ 線を鉄の原子核が吸収すると、次のように分解してしまう:



ここまでの過程は、元素合成の第2段階といわれる（第1段階は、後でビッグバンの項目で述べる）。星がここまで進化すると、中心温度が下がる結果、星は自重を支えきれなくなり重力崩壊が始まる。崩壊して圧縮される結果、中心付近に巨大な一つの原子核のような密度の高い状態になり、接近した陽子 p 、と中性子 n 間に働く斥力によって崩壊が急に止まり、それが衝撃波となって星の外層に進み、爆発の様相を呈す。これが超新星爆発である。

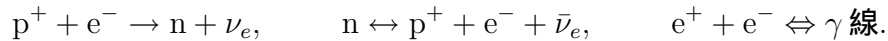
インターネット HP3: "Supernova, Type I & II"

<http://www.pbs.org/wgbh/nova/universe/supernova.html>

「元素合成と超新星爆発」

星の内部は衝撃波の通過で加熱されて核反応が進行する。生まれた大量の中性子が、Fe などの重い原子核に次々に吸収されてウランまでの重元素がつくられると共に、それらを宇宙空間に放出する。これが 元素合成の第3段階 である。

この爆発で解放されるエネルギーは莫大で、約 10 秒間に大量のニュートリノ ν_e が放出される。崩壊で粒子が圧縮されると、中心に中性子 (neutron) n だけからできた高密度の星「中性子星」ができる。このとき、陽子 (proton) p^+ と電子 e^- とが合体して中性子 n が生ずる反応は



と表され、結果として大量の電子ニュートリノ ν_e , $\bar{\nu}_e$ が放出される。このとき解放された熱エネルギーと高圧力による衝撃波が星の外層に進み、高温によって光り輝く。すなわち、ニュートリノがまず放出され、その数時間あとになって、明るくなるなる（演習問題）。以上が、重力崩壊の超新星のシナリオである。これが観測によって確認されたことは、きわめて重要な意義がある。

2.3 KamiokaNDE によるニュートリノの検出

神岡の実験装置は、1987年の2月23日16時35分35秒（日本時間）から13秒間に11個の反応イベントを検出した。このときのニュートリノ ν_e あるいは反ニュートリノ $\bar{\nu}_e$ の反応には2種類がある：

$$A: \nu_e \text{ と水の電子 } e^- \text{ との衝突散乱反応 (方向性): } \nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$$

$$B: \bar{\nu}_e \text{ が原子核の } p \text{ に捕獲される逆ベータ反応: } \bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow e^+ + n$$

超新星からのニュートリノは、真空光速に近いので、ニュートリノとの衝突で跳ばされた e^- , e^+ （右辺）は、水中の光速 c_w より速く、チェレンコフ光を放射する。その光が、KamiokaNDEの周壁に設置された光電子増倍管に捕らえられた。

詳細を調べると、時間的に最初の2例はSN1987aの方向を指し示し、他の9例はほぼ等方的に分布し、方向性をもっていない。この性質から、最初の2例はAの衝突散乱、後の9例はBの原子核の捕獲反応と考えられている。最初に ν_e が飛来した事実は、重力崩壊超新星の理論が预言する通りである。また後者の $\bar{\nu}_e$ から、星から放出された量を見積もると、やはり重力崩壊理論が予想する通りであった。

問題2. 重力崩壊の結果として発生し、伝播する衝撃波について考える。星の中心温度を $T_c = 5 \times 10^9$ K（50億度）として、衝撃波の伝播速度 V_s を見積ってみよう。星G（青色巨星）の半径は、 $R_G = 60R_\odot = 4.2 \times 10^{10}$ m（脚注²）。

$$\text{粒子の平均質量 } \bar{m} = 1.7 \times 10^{-26} \text{ kg} = 10m_p \quad (m_p: p \text{ の質量})$$

$$\text{ボルツマン定数 } k_B = 1.4 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2}/\text{K}$$

以上の数値を使って次の計算せよ：

$$\text{粒子の平均運動エネルギー } \frac{1}{2}\bar{m}\bar{v}^2 \equiv K = \frac{3}{2}k_B T_c = 1.1 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\text{粒子の平均速度 } \bar{v} = \left(\frac{2K}{\bar{m}}\right)^{1/2} = 3.6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\text{衝撃波速度 (音速 } \approx \bar{v}) \quad v_s \approx 1.5\bar{v} \text{ (仮定)} = 5.4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

$$\text{表面に達するまでの時間 } \Delta T \approx \frac{R_G}{v_s} = 7800 \text{ s} = 2^h 10^m$$

² $R_\odot = 7.0 \times 10^8$ m は太陽半径； 地球-太陽間距離 = 1 au = 210 R_\odot .

3. ニュートンの運動方程式はどの時刻どの場所でも成り立つ。

—— 不変性の原理 ——

正確には「物理学の法則はどの時刻どの場所でも不変の形に表せる」というべきである。というのは、ニュートンの力学は、一般相対性理論で置きかえられなければならないからである。

物理学は普遍的現象を研究対象とするので、時間や時代によって異なる法則、空間的な場所や地域によって異なる法則は、対象外となる。ガリレイやニュートンの時代にヨーロッパで研究された「運動の法則」が、21世紀の現代でもアジアの日本の地で成立することは、当然のように考えられがちであるが、その事実は「運動の法則」が時間的、空間的に不変性を有していたことの証左でもある。

そのような時間的・空間的な不変性こそ、実は物理法則に要請される基本的な性質である。16万光年離れたマゼラン星雲で起きた超新星爆発の場合でも、核反応にしる、元素合成にしる、さらには発光現象、気体の爆発現象にしる、地球上の気体、原子発光、原子核反応、核子の研究から理論的に導かれた物理法則が確認されたことは、それらの法則が不変性原理を有し、時間・空間を越えて成立しているということである。それが確認されたことの意義は大変に大きい。

この不変性を、高校物理の力学で考えてみよう。

3.1 エネルギー保存の法則と運動方程式

力学的エネルギー保存の法則は、運動エネルギーを $K = \frac{1}{2}mv^2$ 、位置エネルギーを U とすると、 $K + U = \text{一定}$ と表せる。重力の場合、質点 m の高さ座標を z で表すと、 $U = mgz$ なので (g は地球上の重力加速度)

$$(1/2)mv^2 + mgz = \text{一定}. \quad (7)$$

いま、高さ z での速度が v 、高さ $z + \Delta z$ での速度が $v + \Delta v$ とすると、

$$(1/2)m(v + \Delta v)^2 + mg(z + \Delta z) = (1/2)mv^2 + mgz \quad (8)$$

と書ける。ただし、 Δz は無限小の変位 (無限小変分) と仮定する。そのため、

$$(v + \Delta v)^2 = v^2 + 2v\Delta v + (\Delta v)^2 \approx v^2 + 2v\Delta v$$

として、第3項を省略する。なぜなら、第2項と3項の比 $(\Delta v)^2/[2v\Delta v] = \Delta v/2v$ は微小 (例えば、 10^{-5} もしくはもっと微小) だからである。そのとき式 (8) は、

$$mv\Delta v + mg\Delta z \approx 0 \quad (9)$$

と書ける。この式の第1項は、 $v = \Delta z / \Delta t$ とおくと、

$$m v \Delta v = m \frac{\Delta z}{\Delta t} \Delta v = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta z = m a \Delta z$$

と書ける。ただし、 $a = \Delta v / \Delta t$ は加速度。これを代入すると、式(9)は

$$[m a + m g] \Delta z = 0.$$

この式は、 Δz が無小の(0でない)どんな値でもなりたたねばならないので、 $[]$ 内がゼロとならなければならない。すなわち、

$$m a = -m g \quad (= F). \quad (10)$$

を得る。これは重力 $F = -m g$ に対する運動方程式である。

要約すると、"エネルギー保存の法則が、任意の微小な変位 Δz に対して常に成り立つためには、次の運動方程式

$$m a = F \quad (11)$$

が成立しなければならない。"

もし式(7)の右辺が"一定"でなく、時間 t の関数であったとすると、この運動方程式は得られない。式(7)の右辺が"一定"ということは、全エネルギー $(1/2)mv^2 + mgz$ が時間のずらしに対して、不変であることを表している。

3.2 運動量保存の法則

質量 m の質点の運動方程式(11)を、一般の力 F に対して、空間位置 x 、時間 t で考える。いま、加速度 a が一定であるとしよう。時刻 t_1 では位置、速度がそれぞれ x_1, v_1 、時刻 t_2 では x_2, v_2 であったとすると、

$$x_2 - x_1 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a(t_2 - t_1)^2, \quad (12)$$

$$v_2 - v_1 = a(t_2 - t_1). \quad (13)$$

2つの質点 m, M を考え、両者が互いに力をおよぼし、一定の力 $\pm F$ で相互作用しているとする。それぞれの質量、位置、速度、加速度を、次のように表す：

$$(m, x, v, a), \quad (M, X, V, A)$$

式(13)に m をかけると、

$$m v_2 - m v_1 = m a (t_2 - t_1) = F (t_2 - t_1), \quad F = m a \text{ (とする)}. \quad (14)$$

右辺の $F(t_2 - t_1)$ は力積を表す。同じように、 M に対する式は、大文字を使って、

$$MV_2 - MV_1 = MA(t_2 - t_1). \quad (15)$$

両式の左辺どうし、右辺どうしを加え合わせると、

$$(mv_2 + MV_2) - (mv_1 + MV_1) = (ma + MA)(t_2 - t_1). \quad (16)$$

質点 m に M からはたらく力を F とすると、 $ma = F$. 作用反作用の法則から M にはたらく力は $-F$ なので、 $MA = -F$. 従って、上式は

$$(mv_2 + MV_2) - (mv_1 + MV_1) = (F - F)(t_2 - t_1) = 0.$$

全運動量を $P = mv + MV$ と書くと、これは $P_1 = P_2$. すなわち、

$$mv_2 + MV_2 = mv_1 + MV_1. \quad (17)$$

これは運動量保存の法則を表している。

3.3 不変性と保存法則

運動量保存則 (17) は、式 (14) を使って導かれた。式 (14) の左辺の運動量の差は、時間差 $t (= t_2 - t_1)$ だけに依存している。また、2 点間の距離を $s (= x_2 - x_1)$ とすると、式 (12) から、時間差 t は距離 s だけに依存する。 $x_1 = X$ として、 X をどう選んでも、 $x_2 = X + s$ である限り、2 点間の距離 s は変わらない。また、 $t_1 = T$ として、 T をどう選んでも、 $t_2 = T + t$ である限り、時間差は変わらない。運動量保存の法則 (17) は、そのような相対的な時間 t 、距離 s だけに関係する方程式から導かれた。 X は空間の特定の位置を指定し、 T は時間の特定の時刻を指定するが、運動量保存の法則は、特定の位置、時刻には無関係である。

運動量保存が X, T によらないということは、場所や時刻を ずらしても 成立することを意味する。位置をずらすことを、並進 (へいしん) 変換とよぶ。運動量保存の法則は、力学の法則が、空間的な並進変換に対する不変の性質を有することと関係している。並進変換に対する不変性は、並進対称性ともいわれる。

見方を変えてみよう。式 (16) の左辺は保存量の差 $P_2 - P_1$ なので、式 (16) は

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= (F_m + F_M)(t_2 - t_1), \quad (\text{ただし, } F_m = ma, F_M = MA) \\ (\text{保存量の差}) &= (\text{力学の法則}) \Delta t, \quad \Delta t = t_2 - t_1. \end{aligned} \quad (18)$$

と書ける。もし、(保存量の差) = 0 ならば、(力学の法則): $F_m + F_M = 0$, でなければならない。これから、作用反作用の法則 $F_m = -F_M$ が得られる。

もし、式 (12), (13) が X を含む形であったとすると、以上の法則は得られない。

以上の関係をまとめると、並進対称性から運動量保存の法則が得られ、運動量の保存は力学の法則を与える。これをしばしば「対称性が力の法則を規定する」と簡潔に表現することがある。この性質は、力学のみに限らず、物理法則全般にあてはまるものである。

宇宙物理に関する諸量

- 1 天文単位 (astronomical unit) : $1 \text{ au} = 1.5 \times 10^8 \text{ km} = 1.6 \times 10^{-5} \text{ 光年}$
太陽・地球間の距離 = 1 億 5 千万 km
- 1 光年 (ly=light year) : $1 \text{ ly} = 1 \text{ 光年} = 9.45 \times 10^{12} \text{ km} = 6.3 \times 10^4 \text{ au}$
光が 1 年かかって伝わる距離
- 1 パーセク (pc=per sec) : $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ 光年}$
年周視差 1 秒の距離
- 1 メガパーセク (Mpc) : $1 \text{ Mpc} = 3.26 \times 10^6 \text{ 光年} (= 326 \text{ 万光年})$
- 1 年 : $1 \text{ yr} = 3.15 \times 10^7 \text{ s (秒)}$
- ハッブル定数 Hubble constant : $H_0 = 71.5 \text{ km/s/Mpc} = 21.9 \text{ km/s}/(100 \text{ 万光年})$
- ハッブル時間 : $t_0 = \frac{1}{H_0} = 137 \text{ 億年 (宇宙の年齢ともよばれる)}$

II. 宇宙のすがた

4. 膨張宇宙、赤方偏移、ハッブルの法則

4.1 ハッブルの法則と宇宙原理

1915年のアインシュタイン (Einstein) の一般相対性理論が、20世紀を代表する物理学理論だとすると、「膨張宇宙」の発見は、20世紀の最も重要な宇宙物理学の発見の一つであろう。1910年代から1920年代にかけて、何人かの天文学者の天体観測と・物理学者の理論を受けて、1929年に天文学者ハッブル (Hubble) が、自らの観測結果を「膨張宇宙の理論」で説明した。(参考書 [5])

ハッブルに先きだつてスライファースは、遠くの銀河のスペクトルが赤方に偏移していることを示した。それを受けて、ハッブルは新しい望遠鏡を使って約10年間観測を続けて、何百もの銀河までの距離を測る方法を見つけた。銀河スペクトルと一緒に整理すると、ほとんどの銀河からの光のスペクトルが赤方偏移を示し、そのずれの度合いが地球からの距離に比例して大きくなっている事実が判明した。現在、それはハッブルの法則と呼ばれ、次のように表される：

$$V = H_0 d, \quad H_0 = 71.5 \text{ km/s/Mpc} = 21.9 \text{ km/s/100 万光年}, \quad (19)$$

$$z \equiv \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{V}{c} = \frac{H_0 d}{c}. \quad (20)$$

ここで、 z は赤方偏移とよばれ、その定義は、静止系での波長 λ_0 に対する観測された波長 λ の比から 1 を引いた数である。 V は観測している銀河の後退速度、 d はその銀河までの距離、 c は光速で、 H_0 がハッブル定数である。これは、銀河が遠ければ遠いほど、私たちから速く遠ざかっているという、誰も予想しなかった結論であった。

問題 3. ソンブレロ星雲は 6000 万光年の距離にある。ハッブルの法則によると、遠ざかる速さは、秒速何 km か、時速にすると何 km か。

[答え： 秒速約 1300 km、時速約 400 万 km]

ハッブルは、空のどの方向を見ても、この関係がなりたっていること、すなわち宇宙空間が等方的であることを見つけた。これを一般化して、宇宙のどこにいる観測者にとっても、宇宙空間が等方的に見えるという一様性を加えることは、一般相対性理論の立場からも自然な想定である。宇宙空間が一様で等方的であるというこの仮定は、現代宇宙論の大前提であり、宇宙原理と呼ばれる。(参考書 [5])

われわれの銀河系は何も特別なものではなく、われわれは宇宙の中心にいるわけでもない。宇宙原理に基づいて、ハッブルの法則を説明する最も良い考えは、まるでオープンの中でレーズンを含んだパンが膨らむように宇宙全体が膨張している、という類推である。パンの中のどのレーズンから見ても、周囲の他のレーズンは遠ざかっていくように見える。それはまさにアインシュタインの方程式の解(6.2節)が予言していた状況である。

つまり、答えがすでに用意されていたのである。ハッブルの観測を最も簡単に説明するのは、アインシュタイン方程式の「宇宙が膨張する」というフリードマンの解(6.2節(2)参照)による解釈であり、ハッブル自身もその案を提案した。

インターネット HP4: ”宇宙、膨張する宇宙”

<http://skyserver.sdss.org/edr/jp/proj/basic/universe>

インターネット HP5: ”赤方偏移の決定”

<http://skyserver.sdss.org/edr/jp/proj/basic/universe/redshifts.asp>

インターネット HP6: ”ハッブル図(発展課題)”

<http://skyserver.sdss.org/edr/jp/proj/advanced/hubble/>

定数 H_0 の逆数 $t_0 = 1/H_0 = d/V$ は、現在の距離になるまでにかかった時間の目安を与える:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{d}{V} = \frac{1}{21.9} \text{ 秒} \cdot 100 \text{ 万光年/km} = 4.32 \times 10^{17} \text{ 秒} = 137 \text{ 億年}$$

t_0 はハッブル時間(あるいは特性膨張時間、宇宙の年齢)と言われる。

4.2 赤方偏移

救急車がサイレンを鳴らしながら目前から遠ざかっていくときは、いつも高い音(振動数)から、低い音(振動数)に変化する。すなわち、後退する物体から放射される音波の振動数は、低方に偏移する。これはドップラー効果として19世紀から知られていた物理的性質である。

銀河スペクトルの赤方偏移もこの性質になぞらえられるが、こちらは銀河群の間の巨大スケールの空間での問題である。理論的厳密性(大学院レベル)から言うと、”赤方偏移”は”膨張宇宙”とともに一般相対性理論によって説明されなければならない。しかしその理論の筋道は案外簡明で、理解可能と思うのでここに解説を試みよう。

ここでの考察対象は、互いに離れ離れに飛散している2つの銀河の間の距離と、その間を伝わる光の波である。まず、銀河間の距離を l_0 とすると、ハッブルの法則から、銀河間の相対後退速度は $V = H_0 l_0$ である。ある時間 δt の間に増大する距離は、 $\delta l = V \delta t = H_0 l_0 \delta t$ 。 l_0 に対する比は、

$$\frac{\delta l}{l_0} = \frac{H_0 l_0 \delta t}{l_0} = H_0 \delta t$$

δt は、あらかじめ定めた時間で、右辺はどの l_0 でも、どの銀河にも共通の定数である。例えば、 δt を特性膨張時間 $t_0 = 1/H_0$ の1%にとると、どの銀河のでも、距離は1%増大する。このことを、宇宙が1%増大したということにする。³

次に宇宙空間に2つの天体が距離 l_0 だけ離れて存在するとし、その間を波長 λ_0 の光が伝播する問題を考える。2つの天体は、速度 $V = H_0 l_0$ で互いに離れつつある。光速を c とすると、光が距離 l_0 を伝わるのに要する時間は、 $\tau = l_0/c$ であり、その間に2つの天体の距離は、 $\Delta l = V\tau = (V/c)l_0$ だけ増加する。それゆえ、2つの天体の距離が増加する割合は、次式で与えられる：

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(V/c)l_0}{l_0} = \frac{V}{c}. \quad (21)$$

右辺は前節で定義した $z = (\lambda/\lambda_0) - 1$ に等しいことを次に示そう。

光源 S から周期 T_0 の間隔で波長 λ_0 の光波が放射されているとしよう。もしこの光源 S が速度 V で観測者 O から後退していると、1つの波の山から次の山が放射されるまでの間に光源は VT_0 の距離だけ移動する。このため、相次ぐ山が観測者 O に達する時間は、 VT_0/c だけ増す。すなわち、観測者 O の観測する光波の周期は、

$$T = T_0 + \frac{VT_0}{c} = \left(1 + \frac{V}{c}\right) T_0$$

となる。光源 S で光が放射されたときの波長は

$$\lambda_0 = cT_0$$

であり、観測者 O に光が達したときの波長は

$$\lambda = cT$$

である。したがって、波長の比は ($\lambda/\lambda_0 = 1 + z$ と定義する)

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{T}{T_0} = 1 + \frac{V}{c} = 1 + z \quad (22)$$

³宇宙が有限の大きさをもつ場合には、「宇宙の大きさ」が1%増大したといえるが、現在のところ宇宙が有限か無限かは、わかっていない。

となる。すなわち、(22) 式の $z = V/c$ に (21) を代入すると、

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{l}{l_0} \quad \left(= 1 + \frac{V}{c} = 1 + z \right) \quad (23)$$

が得られる。ただし、 $l = l_0 + \Delta l$ は新しい距離である。

4.3 膨張宇宙と赤方偏移

式 (22) は、形の上ではドップラー効果の式 (3) とまったく同じである。しかし、この式を (23) の形にして、距離 l の比として、宇宙膨張と関係づけて説明する方が、宇宙論の観点からは首尾一貫した統一性のある理論となる。

一般相対性理論では、宇宙空間に曲率が定義される。3次元空間の2次元球面が有限で閉じているように、宇宙に十分質量があれば、重力場の方程式から、3次元の宇宙空間が有限で閉じている、という一つの解が存在する。しかし現在の観測データは、「閉じてない宇宙」のもう一つの解の方を示唆している。[6.2 節 (2) 参照]

有限・無限のいずれの場合であっても、基準のスケール関数 $R(t)$ を導入することができる。初期時刻 $t = 0$ でのスケール (例えば、銀河間の距離) が $R(0)$ 、時刻 t でのスケールが $R(t)$ と定義する。 R は前節の銀河間距離 l に相当する。

宇宙空間を伝播する光子の理論によれば、光子の波長 λ は宇宙のスケール関数 $R(t)$ に比例する。したがって、式 (23) は

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{R(t)}{R(0)} \quad \left(\equiv \frac{l}{l_0} \right) \quad (24)$$

で置き換えられる。

宇宙が膨張すると、宇宙空間を自由に伝播する光子の波長も比例して増加する。これによってスペクトルの赤方偏移が説明される。

5. ビッグバン名残りの宇宙背景放射

5.1 ビッグバン (Big bang)

宇宙が現在膨張しているとする、過去の宇宙は今よりも小さかったはずである。時間を過去へ過去へとさかのぼっていくと、宇宙は窮極的に小さな「一点」になる。この「宇宙が一点になる時」が、宇宙の始まりであると今日では考えられている。一点からの爆発的膨張によって宇宙が誕生したという考えは、ビッグバン理論 (big bang theory) と呼ばれる。

ビッグバンの考え方は、ハッブルによる銀河の観測に基づく一つの宇宙観 (理論的仮説) であるが、その仮説から宇宙全体についていくつかの事柄が予言される (参考書 [5]):

1. 宇宙の星はすべてビッグバンの後に生まれたのであるから、最も古い星でも、宇宙の年齢より若くなければならない。
2. 宇宙の水素 H とヘリウム He の原子核の大部分がビッグバン直後の超高温・高密度の中で合成されたとする、重量比率は、H が約 74%、He が約 26%、となるはずである、と理論的に予言される。 [元素合成の第 1 段階]
3. ビッグバンの名残りである「宇宙背景放射」と呼ばれる宇宙全体を満たすかな光 (マイクロ波) がなければならない。

これらの理論的予言は現在のところ、観測によって、いずれも証拠づけられている。今日ではほとんどの科学者がビッグバン理論を受け入れており、ビッグバンの描像をより詳しく調べることが、今後の天体物理学の研究の大きな方向となっている。以下では 3. の「宇宙背景放射」について述べるが、その前にまず黒体放射 (空洞放射) の法則について理解しておく必要がある。

5.2 プランクの黒体放射の公式

絶対 0 度でない限り、すべての物体は光ないしは電磁波 (ないしは光子) の放射を行う。物体が熱平衡にあるときは、これを熱放射という。特に理想的な物体として、入射するすべての波長の放射を吸収する物体を黒体と呼び、黒体の熱放射を黒体放射という。空洞が同じ性質を有するので、空洞放射ともいわれる。

インターネット HP7: "Black Body Radiation"

<http://www.egglescliffe.org.uk/physics/astronomy/blackbody/bbody.html#curves>

「黒体放射」

黒体放射のスペクトルは振動数 ν (あるいは波長 λ) の関数で表わされ、その公式は絶対温度 T にしかよらない。それはプランクの”放射法則”(Planck, 2000) と呼ばれている。その公式を表すために、次の関数 $P(x)$ を定義する：

$$P(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}, \quad x = \frac{h\nu}{kT} \quad (25)$$

プランクの黒体放射の法則は次のように表せる：振動数 ν と $\nu + \Delta\nu$ の間にある光のエネルギー (1 cm³ 当り) を $U_\nu \Delta\nu$ とすると、

$$U_\nu \Delta\nu = \frac{8\pi(kT)^3}{h^2c^3} P(x), \quad x = h\nu/kT \quad (26)$$

$$\text{または} \quad U_\nu \Delta\nu = 2kT \frac{x}{e^x - 1} \frac{1}{8} 4\pi \left(\frac{2\nu}{c}\right)^2 \Delta\left(\frac{2\nu}{c}\right) \quad (27)$$

同じ放射が、波長 $\lambda = c/\nu$ に対しても表せる。波長 λ と $\lambda + \Delta\lambda$ の間のエネルギーを $U_\lambda \Delta\lambda$ とすると、

$$U_\lambda \Delta\lambda = D \frac{1}{e^{(hc/kT\lambda)} - 1} \frac{1}{\lambda^5}, \quad D = 8\pi hc (\text{定数}) \quad (28)$$

と書ける。この公式の一般的特徴は、「黒体放射は、温度 T できまる波長 $\lambda_p(T)$ で極大のピークをもち (振動数では $\nu_p(T)$)、それより長い波長でも、短い波長でも、エネルギーは減少する。

おおまかに言うと、関数 $P(x) = P(h\nu/kT) = P(hc/kT\lambda)$ は、 $x = hc/kT\lambda_p \approx 2.8$ できまる波長 $\lambda_p \approx kT/(2.8 hc)$ でピークとなる。 $T = 1\text{K}$ では、

$$\lambda_p(1K) \approx \frac{hc}{2.8kT} = \frac{(6.6 \times 10^{-34}) \cdot (3.0 \times 10^8)}{2.8 \cdot (1.4 \times 10^{-23}) \cdot 1} \approx 5.05 \times 10^{-3}\text{m} = 5.1 \text{ mm}$$

すなわち、 $\lambda_p(1K) = 5.1 \text{ mm}$ である。いうまでもなく、ピーク波長 λ_p は、温度 T に反比例して短くなる： $\lambda_p(T) \propto 1/T$ 。

問題 4. プランク放射の関数 $P(x)$ を、変数 x の関数として、 $x : [0, 10]$ の範囲で図示せよ。

問題5. 宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background) の絶対温度は、 $T_{\text{CMB}} = 2.7\text{K}$ と測定された (次節)。CMB のピーク波長 $\lambda_p(\text{CMB})$ は、何 mm か。また、太陽の表面温度は、 $T_{\text{Sun}} = 6000\text{K}$ であることが知られている。太陽光のピーク波長 $\lambda_p(\text{Sun})$ は、何オングストローム (\AA) か ($1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$, $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$)。

[答え: $\lambda_p(\text{CMB}) = 1.9\text{ mm}$, $\lambda_p(\text{Sun}) = 8500\text{ \AA} = 0.85\mu\text{m}$]

5.3 晴れ上がりと宇宙背景放射

研究上の偶然から、宇宙マイクロ波背景放射が発見された。1963年、米国のニュージャージー州で、アンテナを使って通信衛星からのマイクロ波 (波長 0.1mm から 10cm) を受信する研究をしていた二人の科学者ペンジアスとウィルソンが、通信の邪魔になる雑音源を調査しているうちに、ビッグバン時代から残された化石ともいえる宇宙マイクロ波放射を発見した。この宇宙マイクロ波背景放射の発見は、宇宙が過去には高温・高密度の状態にあったことを実証しているもので、ハッブルの法則とならぶ 20 世紀の最大の発見と考えられている。

ビッグバン宇宙論によるとこの宇宙背景放射は、宇宙が約 30 万歳、つまりビッグバンから 30 万年後、物質が宇宙の中でどのような状態であったかという情報を含んでいる。当時の宇宙は、電子 e^- と電離した水素 H^+ 及びヘリウム He^{++} からなる高温のスープのような状態にあった。これらの濃密な粒子群 e^- , H^+ , He^{++} は、当時約 3000K の温度であった宇宙の光子との衝突によって、平衡状態にあり黒体放射で宇宙は満たされていた。

その後、宇宙膨張によって放射は冷え、電子は水素とヘリウムの原子核と結合して、中性の水素原子 H 、ヘリウム原子 He となった。それ以来、背景放射の光子は水素原子やヘリウム原子と衝突することなく (物質と温度平衡になることなく)、自由に宇宙空間を伝わるようになった。これがいわゆる「宇宙の晴れ上がり」である。⁴

宇宙膨張の結果、光の波長が伸ばされ (式 (24))、すなわち赤方偏移して、黒体放射の温度は波長に反比例して下がり、現在絶対温度 2.7 度にまで冷えて、化石の「宇宙マイクロ波背景放射」となって観測されている。このように背景放射は、宇宙がビッグバン初期に熱平衡にあった時期の名残りの放射と考えられている。

NASA の COBE (コービー) 衛星は、このような初期宇宙からの赤外、マイクロ波背景放射を測定する目的で開発され、1989 年 11 月に打ち上げられた。それらを測定し、さらに宇宙マイクロ波背景放射が黒体放射であるか否か知るために、そのスペクトルを正確に測定するのが目的であった。

⁴太陽の場合、内部が見えないのは、内部では光子が、電子 e^- と、水素 H^+ 、ヘリウム He^{++} などの電離気体と衝突しているからである。衝突がなくなる表面から手前が、晴れ上がった状態に見える。

インターネット HP8: ”COBE (Cosmic Background Explorer)”
<http://aether.lbl.gov/www/projects/cobe/#INTRODUCTION>
 CBE (宇宙背景探査機)

測定器 FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer) による観測で、宇宙マイクロ波背景放射のスペクトルが、温度 2.73 K にピークをもつ黒体放射と合致することが示された (波長領域は 0.1 to 5 mm)

インターネット HP9: ”宇宙マイクロ波背景放射”
http://aether.lbl.gov/www/projects/cobe/CMB_intensity.gif

インターネット HP10: ”宇宙の晴れ上がり, COBE, WMAP”
http://map.gsfc.nasa.gov/m_mm/mr_age.html

問題 6. 次の電磁波・光の周波数帯あるいは波長帯の空欄をうめよ：

種類	周波数帯	波長帯	備考
VHF (very high frequency)	30 ~ 300 MHz	10 ~ 1 m	FM ・ テレビ
UHF (ultrahigh frequency)	0.3 ~ 3 GHz	100 ~ 10 cm	テレビ ・ 通信
マイクロ波 (microwave)	0.3GHz ~ 3 THz 1 THz = 10^{12} Hz	1m ~ 0.1 mm	衛星通信 ・ CMB 遠距離中継
赤外線 (infrared light)	300GHz ~ 300 THz	1mm ~ 1 μ m	熱線
可視光	380 ~ 790 THz	0.78 ~ 0.38 μ m 赤 ~ 紫	
ガンマ線 (γ 線)	3×10^{19} Hz 以上	0.1Å 以下	光子 (photon)

MHz : 10^6 Hz, GHz : 10^9 Hz, THz : 10^{12} Hz,

μ m : 10^{-6} m, Å : 10^{-10} m

6. 重力の法則、ブラックホール、光線の湾曲

6.1 一般相対性理論の基本的概念

一般相対性理論は、次のような慣性質量と重力質量の同等性、等価原理、 $E = mc^2$ などの基本的概念に基づいており、観測によって実証されている。それら個々の簡単な説明からは始めよう。

慣性質量と重力質量： 慣性質量 m_I と重力質量 m_G とは同じである。すなわち、

$$m_I g = G \frac{m_G M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} : \quad \text{If } m_I = m_G \Rightarrow g = \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \quad (\oplus : \text{地球})$$

故に、全ての地上の物体は同じ重力加速度を受けている。

等価原理： 慣性力と重力とは同等である。

電車に乗って、電車に対し静止した観測者がいるとき、動く電車から受ける見かけの力が慣性力である。電車が加速度運動するときは、みな同じ加速度を受ける。電車をエレベータで置き換えても同様である。

光線の湾曲： 重力のない自由空間では光は直進するが、重力場の中では光線は湾曲する。これは、次の思考実験で示される。

いま重力のない空間を光が直進しているとする。それに垂直に加速度運動しているエレベータの中で、その光を観測するものとする。一方の壁の窓から光線がエレベータの中に入り、わずかの時間の後、光は反対側の壁に達する。エレベータの中では、光線は放物線を描いて、反対側の壁までいく。つまり、光線は湾曲する。6.3節で重力レンズについて述べる。

この性質は、光がエネルギーをもち、エネルギーは質量を持つことと、等価原理から説明される。

時間の遅れ： 重力場中では、時間の進みがゆっくりとなる。以下に詳しい説明をつけた。

観測による検証：

1. 太陽重力場による光の湾曲（日食観測）
2. 水星の近日点移動。
3. 重力場での時間の遅れ（強い重力場の中で発せられたガンマ線振動数の低下、重力赤方偏移）

いずれも、観測で実証されている。膨張宇宙、宇宙背景放射、ブラックホールなどは、一般相対性理論なしには理解することはできない。

参考書： [3] 下, [6], [7], [4]

重力による時間の遅れ

重力場中でも、等価原理によって無重力座標系を選ぶことができる。それは自由落下の座標系 F_0 である。座標系 F_0 には固定された時計 C_0 があり、 F_0 は時刻 0 に高さ z_1 から、初速 0 で自由落下をはじめたとする。高さ z_2 の低い位置にきたとき、 F_0 の速度は v だったとする。

高さ z_1, z_2 の位置にはそれぞれ時計 C_1, C_2 が固定されているとする。時計 C_2 は、 C_0 に対して速度 v で相対運動しているから、特殊相対性理論により、時計 C_2 が Δt_2 だけ時を刻む間に、 F_0 に固定された時計 C_0 が時間 Δt_0 を刻んだとすると

$$\Delta t_2 = \Delta t_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

他方、 C_0 は初速 0 であったから、 C_0 と C_1 の進みは同じである：

$$\Delta t_1 = \Delta t_0$$

両式から Δt_0 を消去すると、

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \sqrt{1 - (v/c)^2} < 1.$$

すなわち、時計 C_2 は、時計 C_1 よりすすみが遅い。

弱い重力の場合は、ニュートン力学があてはまる。質量 m の質点の位置エネルギーは mgz であるから、エネルギー保存の法則から、

$$(1/2)mv^2 = mgh, \quad h = z_1 - z_2$$

したがって、

$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \sqrt{1 - (2gh/c^2)^2} < 1.$$

つまり、高い場所に置かれた時計 C_1 は、速く時を刻む。高度 8000 m のエベレスト山頂に置かれた時計は、地上の時計 C_2 よりもどのくらい速く、時を刻むか計算してみよ。

6.2 アインシュタインの重力場方程式

アインシュタインの重力場の方程式は、次のような形をしている：

$$R = -8\pi G T$$

[空間の曲率] = $-8\pi G$ [物質のエネルギー、運動量]
[空間のゆがみの度合]

すなわち、物質（質量）が存在すると「空間がゆがむ」ことを、方程式は表現している。この方程式から、ブラックホール解、膨張宇宙解などが導かれる。

4.3 節の式 (24) は膨張宇宙の解から得られる。前者のブラックホール解では、次のシュワルツシルド半径がキーとなる量となる。

(1) シュワルツシルド半径：

ブラックホール解に含まれる最も重要な量は、質量 M の物体のシュワルツシルド半径 r_g である (Schwarzschild, 1916)：

$$r_g \equiv 2GM/c^2, \quad G = 6.7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

これは次のように書き換えられる：

$$(1/2) mc^2 = GmM/r_g$$

質量が M 、半径 r_g の天体があったときに、ニュートン力学的には、質点 m の表面からの脱出速度が、光の速さ c に等しいことを意味している。

星の半径 R が小さくなって、 $(9/8)r_g$ 以下になると、理論的には中心の圧力が無限大となって、自重を支えきれなくなり、重力崩壊せざるをえない。物理現象としては、中性子星は太陽質量の2倍以上になると、無限大圧力になる前に、自重を支える物理的メカニズムがなく、重力崩壊してブラックホール (black hole) になると考えられている。

半径 r_g の球面はシュワルツシルド面と呼ばれる。この面の内側のからは、光も物質も出ることができないので、事象の地平線とも呼ばれる。光が出てこないので black (黒) であり、物質は落ち込むのみなので hole (穴) である。

問題7. 次の物体のシュワルツシルド半径を計算せよ：

物体	質量	シュワルツシルド半径 $r_g = 2GM/c^2$
太陽 M_\odot	$2.0 \times 10^{30} \text{ kg} = 3.3 \times 10^5 M_\oplus$	$3.0 \times 10^3 \text{ m} = 3 \text{ km}$
地球 M_\oplus	$6.0 \times 10^{24} \text{ kg} = 1 M_\oplus$	$9.0 \times 10^{-3} \text{ m} = 9 \text{ mm}$
人	$5.0 \times 10^1 \text{ kg} = 8.3 \times 10^{-24} M_\oplus$	$7.5 \times 10^{-26} \text{ m}$
陽子 proton	$1.7 \times 10^{-27} \text{ kg} = 2.8 \times 10^{-52} M_\oplus$	$2.5 \times 10^{-54} \text{ m}$

(2) 膨張宇宙の方程式

4.3 節で宇宙の基準の長さのスケール関数 $R(t)$ を定義した。これは十分遠く離れた2つの銀河間の距離を表すと考えてもよい。互いに離れていく速度 V は、 $R(t)$ の時間微分で与えられる： $V = \dot{R} = dR/dt$ 。

アインシュタインの重力場方程式から、次のフリードマンの方程式が得られる (Friedmann, 1922)：

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - G\left(\frac{4\pi R^3}{3}\rho\right)\frac{1}{R} = -\frac{1}{2}k \quad (29)$$

ここで、 k は定数で、 $+1$, 0 , あるいは -1 の値をとる。これは、(運動エネルギー)+(重力エネルギー) = $-k/2$ (定数)、というエネルギー保存側と同じ形をしている。 ρ は半径 R の球体積 $(4/3)\pi R^3$ の中の平均質量密度である。

宇宙の膨張を表すハッブル定数 H を使うと、 $\dot{R} = HR$ と書けるので、上式 (29) の第1項は、 $(1/2)H^2 R^2$ に等しい。両辺をこれで割ると、

$$1 - \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} = -\frac{k}{H^2 R^2}$$

すなわち、

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \Omega - 1, \quad \Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (30)$$

$\Omega = \rho/\rho_c$ は、密度 ρ と臨界密度 ρ_c との比である。

k の3つの値 $+1$, 0 , および -1 は、次の3種の宇宙空間を表している：(1) 「閉じた有限の宇宙」(例えば球のよう)、(2) 「無限の平坦な宇宙」(ユークリッド

空間) もしくは(3)「開いた無限の宇宙」(ウマの背の鞍, もしくは反ったポテトチップのよう)。従って、上の結果は次のように、まとめられる:

$\Omega > 1$ なら, 宇宙は閉じて有限,

$\Omega = 1$ なら, 宇宙は平坦で無限,

$\Omega < 1$ なら, 宇宙は開いて無限.

6.3 重力レンズ

光は重力場によってその進路が曲げられる。光線のこの湾曲は、1919年の日食の時、太陽付近の星の観測で測定され、一般相対論の結果が実証された。光の曲げられ方は、あたかも質量をもつ粒子のごとく重力中心に引き込まれる方向である。最近この性質が、「重力レンズ」の名で宇宙物理的な関心を引き起こしつつある。そのきっかけは、天空の同じ方角、ほぼ同じ距離の位置に二つの似た電波天体が観測され、そのスペクトルが偶然とは言えないほど、よく一致していたことであった。重力レンズ効果で遠方の天体の多重像が観測される可能性は、すでに予想されていた。最近の興味は、むしろ宇宙論的観点からで、太陽の代わりに銀河や銀河団がレンズ物体となって、さらに遠方の天体や銀河の像が歪(ひず)んだり、多重像となる現象である。遠方の銀河からの光が、球状のレンズ天体(質量 M) のそばを通過するとき、光線が曲げられる角 α は、シュワルツシルド半径 r_g の2倍を、最近接距離 p で割った値に等しい(図)

$$\alpha = 2 \frac{2GM/c^2}{p} = \frac{4GM}{pc^2}$$

レンズ効果のために、角度にして約1秒の銀河が、数秒程度の弧状の像になることもある。このような歪んだ天体の像から、レンズ物体の質量の分布が推定され、光では観測されない暗物質が観測される可能性もあろう。

6.4 宇宙の始まりとプランク・スケール

宇宙はビッグバンによって、高温・高密度の状態から始まったと考えられている。現在の理論では、プランク時間 $t_P = 7 \times 10^{-44}$ s までさかのぼることが出来る。そのときの宇宙の大きさは、時間 t_P の間に光が伝わる距離 $l_P = ct_P = 2.3 \times 10^{-35}$ m 程度の大きさであり(これはプランク長さ $\equiv \sqrt{G\hbar/c^3}$ とよばれる)。その中にプランク質量 $m_P(\equiv \sqrt{\hbar c/G}) = 5.5 \times 10^{-8}$ kg 程度のエネルギー ($E = m_P c^2$) が含まれていた。

これらの値は、以下のような推論から導かれる。宇宙初期の状態は、物質・エネルギーの密度が非常に高く、一般相対論で考えなければならないが、他方、非

常に小さい世界でもあるので、量子力学の不確定性原理に対応する”ゆらぎ”も同時に考えなければならない。不確定性原理によれば、わずかな時間 Δt の間に、わずかなエネルギーのゆらぎ ΔE が起ることが可能である。プランク定数を h とすると、それらの間には

$$(\Delta E)(\Delta t) \approx \hbar \quad (\equiv h/2\pi) \quad \Rightarrow \quad m c^2 \Delta t \approx \hbar$$

の関係がある。ただし ΔE に相当する質量を m とし、 $\Delta E = mc^2$ とした。

一方、 Δt に相当する長さ l は、その間に光が伝わる距離として、

$$l = c \Delta t \approx \frac{\hbar}{m c} \quad (31)$$

これが「重力と結びついた現象である」とすると、長さ l は重力場の代表的長さシュワルツシルド半径 r_g と同程度であろう： $l \approx r_g = 2Gm/c^2$ 。この等式から決まる質量がプランク質量 m_P である。すなわち、

$$\frac{\hbar}{m_P c} \approx \frac{2G m_P}{c^2} \quad \Rightarrow \quad m_P \approx \sqrt{\hbar c / 2G} \quad (32)$$

この m_P を式 (31) の m に代入して得られる長さをプランク長さ l_P とすると、

$$l_P \approx \sqrt{\frac{2\hbar G}{c^3}} \quad (33)$$

が得られる。この長さを c で割った値がプランク時間 $t_P = l_P/c$ である。

6.5 ひも理論 (String Theory)

しかしながら、一般相対性理論と量子理論とを融合した、このような量子重力理論の理論体系はまだ完成されていない。むしろ現在有望視されているのは、「ひも理論 (String Theory)」である。ひも理論では、プランク長さ $l_P = 2.3 \times 10^{-35}$ m より小さいスケールは (原理的に) 存在しない。一般相対性理論では、ビッグバンは大きさ 0 の点から始まったことになって、そこではエネルギー密度、温度等が無限大になり、理論が破綻する。ひも理論は、一般相対性理論と量子理論とを両立させる理論と考えられ、これまで統合されていなかった重力を、他の力 (電磁気力、核力) と統一させる理論であると考えられている (参考書 [8])。

「ひも」にはプランク質量 m_P 程度の高いエネルギーが詰まっているとし、ひもの断面の半径がプランク長さ $l_P = 2.3 \times 10^{-35}$ m とすると、この微小断面の「ひも」は、約 10^{43} kg の高い張力のもとにある。このような張力のもとで振動する「ひも」の振動パターンが、個々の素粒子に対応する。ここが、素粒子はクォークなどの異なる要素から構成されているとする、これまでの理論と異なる点である。

III. 力学系 (ダイナミカル・システム)

7. 気象現象と決定論的カオス [VTR: 気象衛星の雲の画像]

質点の運動では、初期の位置および速度がわかると、後の時刻の質点の位置、速度が知られる。それよりもはるかに複雑ではあるが、毎日の気象現象でも、今日の天気の状態が知られると、明日の天気が予測される。それは、気象衛星の雲の画像からも推定できるが、実際に気象庁では、計算機を使って、今日の風速分布、気圧分布、温度分布などから、明日の天気の状態を、計算して予測している。

一般に、現在の状態がわかって、それから次の時間(または瞬間)の状態が知られる場合がよくある。そのように時間的に発展、推移する系(システム)は、力学系(Dynamical system, ダイナミカル・システム)と呼ばれる。重力場で落下する質点の運動は、もっとも簡単な力学系に属するが、地球大気の運動が原因となる気象現象も、典型的な力学系である。しかし、両者には大きな違いがある。鉛直に落下する質点の場合、質点の位置 x および速度 v は、時間 t の関数として $x(t)$, $v(t)$ と表され、それは2変数の力学系である。

気象の場合は、世界各地の風速、気圧、温度などが時間の関数なので、無数に多い変数の力学系である。変数が多数になると、自由落下する質点のように、時間の関数で簡単に表すことが不可能となる。例えば、ある地点の気圧は、周辺の気象条件、世界各地の条件の変動を受けて、複雑に変動するため、明日の気圧は大よそ予測できたとしても、1週間さき、ましてや1ヶ月さきの変動予測は、ほとんど不可能となる。

多数の変数の力学系には、一般に決定論的カオス(deterministic chaos)という性質がある。すなわち、明日などの近未来の状態は、方程式を使ってかなりの精度で予測できるが、1ヶ月さきなどの遠未来の状態はランダムなふるまいとなり、予測が不可能になる。実は気象現象は、そのような決定論的カオスの典型的な力学系である。

皆さんも、自分自身のことを考えて見てください。明日の予定はたち、おおよそ予定の通りに実現されるでしょう。しかし、1週間先の予定はどうでしょうか、1ヶ月先、1年先の予定はどうでしょうか。予定の通り、実現される保証はあるのでしょうか。これは、さまざまな、わずかではあるが、予期してなかった事態が起り、それが後に2倍、4倍、8倍と、倍々となって影響してくるからです。例えば、何かの熱源があって、ある点の温度が0.1度ずれたとします。翌日には、熱源がないときに比べて0.2度、その翌日には0.4度、次は0.8度とずれていくとしましょう。5日後には、3.2度のずれを生むといった変動になります。このように1度以上ずれば、予測は当たらなかった、ということになります。気象現象には、これに似た性質があるので、カオス力学系といわれています。気象衛星が映す雲のパターンは、そのような決定論的カオスのふるまいを示しています。

参考書

- [1] 「ようこそニュートリノ天体物理学へ」小柴昌俊著（海鳴社），2002年
- [2] 「物理学とは何だろうか」上下，朝永振一郎著（岩波新書 85），1979年
- [3] 「物理学はいかに創られたか」上下，アインシュタイン・インフェルト著（岩波新書 R15），1940, 63年
- [4] 「宇宙の進化」杉本大一郎・吉岡一男著（放送大学テキスト），2001年
- [5] 「宇宙創成はじめの三分間」ワインバーグ著（ダイヤモンド社），1977年
- [6] 「ブラックホール」佐藤文隆・ルフィーニ著（自然選書、中央公論社），1976年
- [7] 「宇宙 96%の謎」佐藤勝彦著（実業の日本社），2003年
- [8] 「エレガントな宇宙（超ひも理論）」ブライアン・グリーン著（草思社），2001年